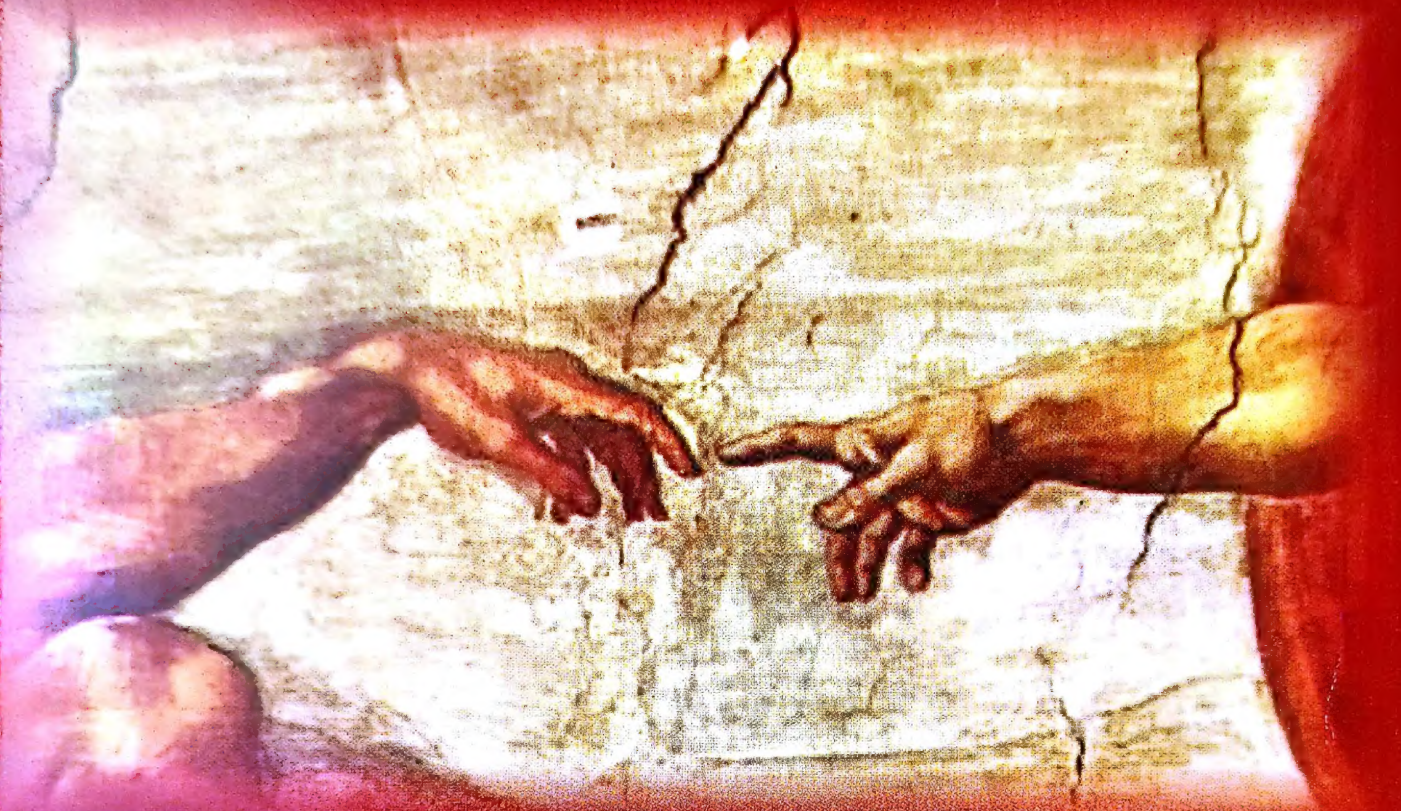


**FLORICA T. CÂMPAN**



**DUMNEZEU  
ȘI  
MATEMATICA**

**Editura TAIDA  
– IASI –**



**FLORICA T. CÂMPAN**

**DUMNEZEU ȘI  
MATEMATICA**

**EDIȚIA A II-A**

**EDITURA TAIDA  
IAȘI – 2005**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

Dumnezeu și matematica

Florica T. Câmpan / Iași: TAIDA, 2005

p. 64; cm. 14 x 20

ISBN 973-7980-43-3

I. Florica T. Câmpan

51(075.33)(079.1)

**EDIȚIA I**

**ISBN 973-95346-6-x**

**EDITURA MINIED,**

**EDITOR VALENTIN PÂNZARIU**

**TEHNOREDACTOR DAN BRÂNZEI**

**TIPARUL GRAND PVD, 1994**

**EDITURA TAIDA Iași**

**Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iași - 700309**

**Tel/fax : 0232.270250**

**Gsm. 0744.320323; 0741.232400**

**www.editurataida.ro; alfaromania@pcnet.ro**





## PREFAȚĂ LA EDIȚIA II

Am avut privilegiul să o cunosc pe Florica T. Câmpan. Diferența de vârstă, vreo 36 de ani, nu a îngreunat câtuși de puțin comunicarea și simpatia reciprocă. Presimțind că vine vremea să închidă ochii mi-a înmănat cu mâini tremurânde manuscrisul acestei cărți, un caiet studentesc învelit cu grijă într-o hârtie ce era albă doar pe o față. Timpul nu era deloc prielnic unor asemenea scrieri. – *Știu că va veni o vreme când oamenii nu se vor înverșuna împotriva iubirii și înțelegerii între ei și univers. Poate vei găsi atunci vreme să socotești dacă este sau nu prielnic să o înfățișezi unor cititori.*

Vremea a venit, dar destul de șovăielnic. Manuscrisul, procesat și listat, a adăstat mai bine de doi ani prin sertarele mai marilor Mitropolii Iași. Într-un târziu, a fost returnat: – *Scrierea nu este de folos ortodoxiei; laudele de aici sunt pentru alte religii.*

Știam bine obârșia armenească a Floricăi. Știam că a ales ortodoxia găsind-o mai potrivită ca altele modului în care înțelegea ea credința, dragostea, toleranța, înțelegerea. Cu toate acestea, răspunsul primit m-a cam dezorientat. A mai trecut o vreme până m-am decis să înțeleg că esența bunei credințe nu impune algoritmi sau o cale unică de exprimare. Atunci am găsit modalitatea de a tipări 3000 exemplare care s-au împrăștiat atât de temeinic încât cu greu am mai găsit un exemplar prin care să reînnod editarea.

Februarie 2005

Dan Brânzei



## PREFATĂ LA EDIȚIA I

Florica T. Câmpan (1906-1993) a văzut lumina zilei la 13(26) noiembrie 1906 în orașul Iași, unde a rămas până în ultima clipă a existenței d-sale. Ca elevă a liceului „Oltea Doamna”, pe care îl absolvă în 1924, a fost remarcată de profesoara Silvia Creangă pentru aptitudinile sale deosebite pentru matematică. Urmează Facultatea de Științe din Iași, unde își trece licența în fizică (1928) și apoi licența în matematică (1929). A funcționat întâi ca profesoară în învățământul liceal, iar în anul școlar 1940-1941 ca asistentă la Seminarul Matematic. În 1942 își susține doctoratul în fața unei comisii prezidate de renumitul profesor Alexandru Myller, cu o teză de geometrie diferențială, intitulată „Surfaces parallèles et semblables”.

În perioada 1945-1951, este conferențiar de matematici generale la Institutul de măsurători terestre din Iași, după care trece la facultatea de Matematică și Fizică a Universității „Al. I. Cuza”, unde rămâne până la pensionare. În ultimii ani ai vieții, doamna Prof. Dr. Doc. Florica T. Câmpan a funcționat ca profesor consultant la Catedra de Ecuatii diferențiale, Cercetări operaționale și Probabilități a Facultății de Matematică din Iași.

Numele distinsei profesoare Florica T. Câmpan este foarte cunoscut. Matematicienii cunosc realizările științifice deosebite ale domniei sale, în special cele din domeniul geometriei diferențiale, cercetări inspirate de profesorul Alexandru Myller. Foarte apreciate sunt, de asemenea, studiile domniei sale de istoria matematicii.

Foștii studenți, astăzi răspândiți în toată țara, cărora domnia sa le-a împărtășit din tainele matematicii, au cunoscut talentul didactic cu totul remarcabil și generozitatea d-sale.

Marele public o cunoaște, în primul rând, prin intermediul cărților de popularizare a matematicilor și de istoria matematicii, în



care, așa cum afirma academicianul Solomon Marcus, doamna „Prof. Dr. Doc. Florica T. Câmpan, om de știință de înaltă competență, talent și cultură, face dovada măiestriei în prezentarea, nu numai accesibilă, dar și agreabilă a obiectului. Inițierea în fundamentele matematicii se împletește tot timpul cu grija pentru aspectul istoric și uman al faptelor”. Aceste cărți, în care se îmbină, în mod fericit, informația științifică cu talentul literar, au încântat mii de cititori de diferite vârste și categorii sociale, atât din țară cât și din afară. În toate cărțile pe care le-a scris până acum („Istoria numărului  $\pi$ ”, „Probleme celebre din istoria matematicii”, „Aventura geometriilor neeuclidiene”, „Licuricii din adâncuri” ș.a.), Florica T. Câmpan depășește aspectul pur științific al investigației, încercând să răspundă unor întrebări de natură filosofică sau mistică în legătură cu matematica.

Cartea de față poate fi socotită ca o încununare a eforturilor și căutărilor de o viață ale autoarei, ca o sinteză a trăirii transcendente în lumea matematicilor și a marilor matematicieni. Florica T. Câmpan a pătruns cu discernământ în tainele evoluției matematicii, înțelegând că matematica nu este o simplă știință, ci ea reprezintă, ca și credința, o cale pentru a te apropia de Dumnezeu. De altfel, ideea relației dintre știință în general și divinitate a preocupat de-a lungul istoriei pe majoritatea oamenilor de geniu. Omul însuși a fost creat de Dumnezeu după chipul și asemănarea sa, fiind înzestrat cu harul gândirii. Aleșii Domnului, oamenii de geniu, se bucură în plus de inspirație, care este de natură divină, și îi conduce la revelația adevărurilor științifice. După cum spunea marele filosof și gânditor creștin Petre Țuțea (1901-1991) „revelația Realului este o favoare divină a alesului”.

În particular, tot Petre Țuțea spunea că „matematica nu este o glorie a omului, cum a afirmat Kant, ci a Domnului, cum ne arată aleșii”. Desigur, în exprimarea filosofului român, matematica semnifică știința marilor descoperiri calitative ale minții umane, ajutate de inspirația divină.



Cartea de față reprezintă, o pledoarie în sprijinul ideii că matematica este de natură divină. „Să ne apropiem de Dumnezeu, cum au făcut-o prin studiul matematicii mulți dintre înaintașii noștri. Oare matematica nu a lăsat gândirea să pătrundă într-o lume senină și liniștită, paralelă cu aceea pe care au descoperit-o acei care au căutat adevărurile divine? Aș dori să ne cufundăm în matematica pură, în acele capitole care nu-și propun nici un scop practic... să aruncăm o privire la matematica babiloniană, la cea egipteană și, apoi, bineînțeles, să admirăm pe matematicienii greci. Apoi, din aproape în aproape, să ajungem la Georg Cantor care, introducând în matematică infinitul actual, ne-a apropiat chiar de Dumnezeu!”, spune autoarea, stabilind astfel itinerarul excursiei în istoria matematicii la care sunt invitați cititorii.

Subiectele pe care le abordează sunt prezentate, ca și în alte cărți, sub forma unor dialoguri savuroase care dau investigației abstracte culoare artistică și căldură umană.

Cititorii de toate vârstele își vor îmbogăți cugetul citind aceste ultime rânduri scrise de distinsa profesoară Florica T. Câmpănuș, care acum odihnește în cimitirul Eternitatea, alături de alți oameni celebri ai orașului Iași.

10 aprilie 1994

**GHEORGHE MOROȘANU**

**CATEDRA DE ECUAȚII DIFERENȚIALE**



## Dumnezeu și Matematica

**„Matematica vine de la Dumnezeu  
și conduce la Dumnezeu”**

Gerbert

- Dragă Bădie, am venit la mata, mânat de articolul acesta, publicat de Pierre Thuillier în ultimul număr din „*La Recherche*” (1) ca să-l forfecăm împreună. Dacă te uiți la dată și la titlu, poate că te vor surprinde...

- Data e clară, odată ce ai zis că-i ultimul număr din *Recherche*, înseamnă ianuarie 1987, rămâne să văd titlul.

- Titlul este pus sub forma unei întrebări: „*Matematica te conduce la Dumnezeu?*” și tot printr-o întrebare începe și articolul: „*Matematica este o flacără, interioară și naturală pe care Dumnezeu a aprins-o în noi, ca să pătrundem mai bine adevărurile vieții creștine?*”. Îți spun drept că venind înapoi aveam impresia că nu aduc un articol publicat acum la Paris ci o lucrare scrisă prin veacul al X-lea, de către Gerbert!

- Gerbert? interesantă figură! Sub numele de Silvestru al II-lea, el a fost Papă în anul 1000. A studiat și chiar a predat matematica și a scris o aritmetică și o geometrie.

- Exact. S-a născut în Franța cam prin anul 940 și a intrat de mic copil în mănăstire. Arătând o deosebită înclinare către studiu, alături de Biblie a mai învățat și gramatica, limba latină, retorica, logica și, la urmă, aritmetica și geometria, care i s-au lipit de suflet.

- Dar Gerbert nu a fost singurul călugăr care pe lângă Biblie să fi studiat și matematica! Înaintea lui au făcut-o mulți alții și nu mai datorită lor s-au păstrat, în Bibliotecile mănăstirești, mai multe manuscrise matematice.

- Da, în epoca plină de frământări sociale, care a început în secolul al IV-lea, și a durat până în secolul al IX-lea, acolo era singurul loc sigur, unde asemenea manuscrise și-au găsit adăpost. Foarte probabil că acolo a cunoscut Gerbert și cele două cărți ale



lui Boetius: „*De institutione arithmetica*”, în care se afirmă că știința teologică rămâne inaccesibilă acelor care nu au formație matematică. Și poate și Aritmetica lui Cassiodor, elev al lui Boetius, în care se arată că „un motiv suficient ca să fii îndemnat să studiezi matematica este faptul că Dumnezeu a creat Universul introducând la baza lui noțiunile de număr, de măsură și de greutate”.

Prin anul 967, Gerbert se afla în Spania, dar nu se știe dacă a putut studia matematica în școlile din acea regiune. În 972 era din nou în Franța ca director al școlilor din Reims, acolo a predat matematica și a scris Aritmetica în care găsim afirmația: „*Aritmetica nu a fost făcută de oameni căci în ea se află statornicia și înțelepciunea puterii inexprimabile și divine, despre care se spune că a făcut toate lucrurile cu măsură, greutate și număr*” (2). După anul 999, când Gerbert a devenit Papă, el a compus și Geometria în care afirmă: „*Geometria exercită forțele spirituale, ea activează pătrunderea lor, ea este plină de speculații sublime, ea ne conduce la contemplare, ne face să lăudăm admirabila putere a naturii și a Creatorului ei, care a dispus toate lucrurile cu număr, măsură și greutate*” (3).

- Știai că această ultimă propoziție se află în Biblie și că a fost rostită de Solomon? (4).

- Nu. Acum îmi explic eu, de ce repetă savantul medieval această afirmație, pe care o pusese și în Aritmetică. Gerbert a murit în 1003 dar de-a lungul Evului Mediu, ba chiar și până în secolul al XIX-lea viața și opera lui au fost cercetate cu pasiune. Bineînțeles că în biografia acestui Papă filosof a fost loc să se intercaleze destule legende, în care nu putea să nu apară și diavolul. În studiul lui Picavet, găsim observația: „*Gerbert i-a întrecut pe toți contemporanii săi... și a uimit prin mulțimea cunoștințelor sale. Succesele lui ca profesor i-au atras prietenia celor mari, a regilor și a împăraților... Alături de ignoranța mereu crescândă a celor din jurul său, se opunea sinteza făcută de Gerbert din toate cunoștințele umane și divine. Rivalii lui la papalitate, precum și mulțimea igno-*



*rantă, au ținut în jurul succeselor lui, precum și a morții lui neașteptate, povești în care au amestecat puterile magiei" (5).*

- Dar, după câte văd eu, dragă Nucule, ne-am cam luat cu vorba și am lăsat la o parte articolul tău. Hai să vedem cum a răspuns autorul la întrebările pe care le-a pus.

- Poftim, întâi afirmă că mulți au fost de această părere. Apoi arată că în secolele XVII și XVIII mulți apărători ai creștinismului au subliniat că matematica apare ca o ocazie favorabilă de a te apropia de Dumnezeu. Ca exemplu, citează mai întâi „*Elementele de Geometrie*” ale lui R. P. Bernard Lamy, apărute în 1685, care încep cu cuvintele: „*Am refăcut această lucrare, fiindcă am recunoscut că ea poate servi la formarea spiritului și a inimii.*”

*Pe Dumnezeu trebuie să-l privim în toate lucrurile și studiul geometriei trebuie să ne ducă într-acolo.... Tot ce apare frumos în această știință relativ la figuri, la rapoartele și propozițiile lor, se observă și în operele naturii, ceea ce ne dă prilejul să admirăm pe Acela care a fost Făcătorul. Pe lângă plăcerea spirituală pe care ne-o dă geometria, ca să ne pătrundă de dispreț pentru voluptate, și prin aceasta de a ne face mai apți pentru morala Evangheliei... ea ne face să cunoaștem cât de vastă este știința pe care o posedă acei care îl văd pe Dumnezeu și de câtă plăcere se bucură descoperind atâtea adevăruri de esență divină”.*

-Așa dar, iată că influența lui Gerbert se vedește și după aproape șapte veacuri!

-Bine, dar și înainte de Lamy, cardinalul Nicolas de Cues (1401-1464) se referă nu numai la acest text, ci și la acela al lui Boetius: „*Știința veritabilă este aceea a numărului și a mărimii*”, spune el, continuând: „*mai mult, știința teologică ar rămâne inaccesibilă aceluia care i-ar lipsi formația matematică. Căci principalul model divin a fost, în însăși gândirea Creatorului, Numărul*”.

-101 32- Contemporan cu Lamy era și iezuitul Ignace de Pardies care a publicat în 1673 o altă geometrie în care este vorba de o demonstrație și mai rafinată a existenței lui Dumnezeu, prin considerarea



spațiilor asimptotice: „Cunoașterea spațiilor asimptotice este lucrul cel mai admirabil din lume și care ne face să vedem cel mai limpede mărimea și spiritualitatea sufletului nostru, căci prin lumina spiritului său, pătrunzând dincolo de infinit, el descoperă așa de clar lucrurile, pe care nici o experiență sensibilă nu ne poate învăța și pe care nici o putere corporală nu ar putea-o observa... Aceste spații infinite în lungime, sunt totuși egale cu un cerc sau cu o figură limitată, astfel că infinitul însuși, așa de imens și de nenumărat cum este, se reduce la calcul și la măsura Geometriei și Spiritul nostru, încă mai mare decât calculul, este capabil să-l înțeleagă.

Din toate cunoștințele naturale pe care omul și le poate însuși prin propriul raționament, cea mai admirabilă este, desigur, înțelegerea infinitului. Trebuie să recunoaștem că noi avem, separată de materie și venind din alt loc decât din corp, o facultate spirituală, independentă de organele noastre, avem idei și reprezentări clare și distincte despre o întindere infinită și, prin urmare, această facultate care ne reprezintă astfel, ceea ce nici un corp nu poate reprezenta, este o putere pur spirituală și deosebită de materie. Printr-o simplă demonstrație, Geometria probează, pe de o parte, una dintre cele mai admirabile proprietăți ale naturii și, pe de altă parte, unul dintre cele mai mari adevăruri morale... natura divină este un abis de lumină ce se răspândește peste tot... Prin exemplul asimptotelor, Geometria demonstrează că trebuie să revenim la prima natură... Rezultă, de aici, că noi posedăm o dovadă de netăgăduit despre experiența lui Dumnezeu, pentru că numai El a putut zămisli o realitate în care se leagă împreună așa de remarcabil, infinitul cu finitul ”.

Văd că odată cu noțiunea de infinit, în articolul tău apare și celebra cugetare a lui Pascal: „Dumnezeu este un cerc al cărui centru este pretutindeni iar circumferința nicăieri”, remarcându-se totodată că această imagine a fost luată din tradiția hermetică!



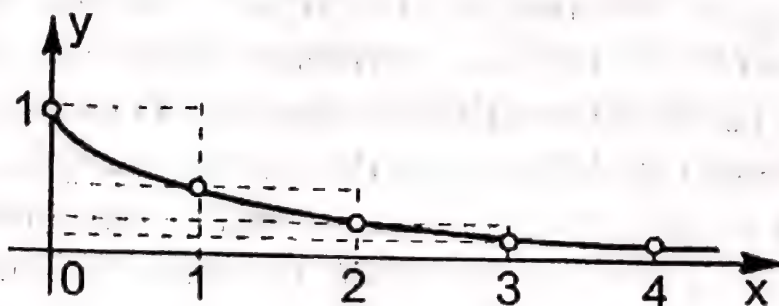
- În articol este menționată și cartea abatelui de Moigno, „*Splendorile credinței*”, publicată în 1879, în care se afirmă cu vigoare valoarea religioasă a matematicii: „*dogma capitală a creației este un simplu corolar al științei numerelor*”, sau că: „*ateismul este negația evidenței matematice*”.

- Stai, că ai trecut prea repede la Moigno! În legătură cu spațiile asimptotice, Pardies vorbește despre „*o simplă demonstrație geometrică*”, o face? Aș vrea să ne oprim asupra ei.

- Se poate. În articolul care este în fața noastră nu o vei găsi, dar ai noroc că am adus cu mine cartea lui Maupin, pe care P. Thuillier o citează și din care am să-ți citesc ce spune: „*Pardies afirmă că spațiile infinite în lungime sunt egale cu o mărime determinată*”.

-Oprește-te din nou. Mai întâi să definim ce se înțelege prin asimptota unei curbe.

-Dacă vrei, bine. Asimptota unei curbe, care are o ramură infinită, (bineînțeles că o curbă poate avea și mai multe ramuri infinite, unele având asimptote, altele nu) este dreapta care rămâne paralelă cu acea ramură a curbei, adică o întâlnește la infinit. Acum citesc mai departe din Maupin: „*Asta înseamnă că dacă consideri o curbă, ca de exemplu  $y = 2^{-x}$ , spațiul cuprins între Oy, această curbă și simptota ei Ox, deși are o lungime infinită, rămâne totuși finit. Aici, de exemplu, se vede că spațiul considerat este mai mic decât suma arcelor dreptunghiurilor având aceeași baza egală cu 1 și înălțimile respectiv egale cu 1, 1/2, 1/4, 1/8, ... ori această sumă de arii ale dreptunghiurilor are ca limită 2 (6).*”





- Îmi place, acum poți vorbi și de Moigno.

- Abatele Moigno este citat în Marele dicționar universal al lui Larousse unde se arată că el a urmat cursurile de matematică ale lui A. Cauchy și, inspirat de aceasta, a compus la rândul lui un curs de Calcul diferențial și integral. Despre Cauchy se spune că, în cursul său, a contrazis teza materialistă, spunând că: „*lumea a avut un început și va avea un sfârșit*” ajungând la concluzia că „*știința ne conduce în mod obligatoriu la ceea ce ne învață credința: materia nu-i eternă și dacă cea mai veche dintre cărți nu ne-a revelat destul de clar acest adevăr, dacă nu-l admitem fiind creștini, suntem obligați să-l admitem ca aritmeticieni, ca matematicieni*”.

- Curioasă gadină mai ești și tu, dragă Nucule! Tocmai acum, când în domeniul aplicațiilor matematica a luat o dezvoltare așa de mare, când se stabilesc algoritmi prin care să se poată trece pe calculatoare problemele ce se cer rezolvate, când problemele ce se pun matematicii sunt, în cea mai mare parte, de natură tehnologică, când e la modă analiza numerică cu toate aplicațiile ei practice, tu vii la mine și-mi propui să discutăm despre părerile lui Gerbert, Lamy, Pardies?

- Deloc! Gerbert, Lamy, Pardies au fost doar niște exemple întâmplătoare. Știu, tot așa de bine ca și mata, cât de mult s-a schimbat matematica în ultimii 60 de ani. Acum, multe probleme care se considerau odinioară că fac parte din matematica pură, ca de pildă geometria cu patru dimensiuni, aparțin fizicii și matematicilor aplicate. Tot așa teoria grupurilor are largi aplicații în teoria informaticii. În același timp, informatica a pus probleme noi algebrei și logicii. Matematicienii și inginerii își pun împreună problemele concrete ce trebuiesc rezolvate. Fizicienii, inginerii, economiștii au cerut matematicienilor ajutor concret și precis; aceasta a dus la crearea de laboratoare de matematică aplicată în care s-au dezvoltat și probleme teoretice noi pentru matematicieni, și numai punându-se asemenea probleme concrete, s-a putut observa că



anumite capitole ale matematicii nu erau în stare să dea soluțiile potrivite care se cereau și de aceea acele capitole au trebuit dezvoltate.

În felul acesta asistăm acum la o reînnoire a matematicii. Dar cu toate că eu nu contest meritul matematicii actuale și importanța soluțiilor pe care le aduce ea, la dezvoltarea problemelor concrete și prezente, eu îmi cer altceva. Am venit azi la mata să te rog să uităm prezentul și să privim matematica din interior, ca pe o poezie, căci poezia este trăire interioară, reflectarea unei splendori spirituale. Să ne cufundăm în ea, „*ca într-o mare de visări dulci și senine*”, cum spune Eminescu. Să ne apropiem astfel de Dumnezeu, cum au făcut-o prin studiul matematicii mulți dintre înaintașii noștri. Oare matematica nu a lăsat gândirea să pătrundă într-o lume senină și liniștită, paralelă cu aceea pe care au descoperit-o acei care au căutat adevărurile divine? Aș dori să ne cufundăm în matematica pură, în acele capitole care nu-și propun nici un scop practic, nici nu s-au dezvoltat dintr-o nevoie practică și nici nu-și propun să rezolve o chestiune practică. Să ne îndreptăm spre acele înălțimi neclintite:

*"Unde nicidecum nu se strecoară un nor,  
Unde vântul nestăvilat, să adie nu se-ncumetă,  
Și nici un fulg de nea nu cade pe pământ,  
Unde nu pot ajunge tunetele furtunii,  
Unde n-auzi suspinile amare ale omului  
Și nimic nu izbutește  
Liniștea veșnică și sfântă să tulbure"*(7)

La aceste versuri, inspirate de un Referat din 1870 asupra naturii matematicii, aș vrea să mai adaug și această observație a lui P. Boutroux (8): „*O aplicație tehnică oferă un interes trecător, căci alte progrese tehnice o vor înlocui cândva. Din contra, o frumoasă teorie matematică se impune prin forța ei eternă. Proprietățile secțiunilor conice nu au aceeași valoare azi, ca și pe vremea lui Apollonius? În schimb, formulele pe care le-au folosit Alexandrinii ca să-și construiască podurile ori corăbiile, sau ca să-și construiască*



*tabelele astronomice, au pierdut orice interes în ochii tehnicienilor noștri ”.*

- M-ai convins! Și de unde vrei să începem?

- N-aș zice să ne întoarcem cu vreo 10.000 de ani în urmă, deși poate că au existat și pe atunci minți care au tresărit privind în noapte stelele, pe care le-au grupat în constelații și au întrezărit astfel numărul și forme geometrice. Dar aș vrea să aruncăm o privire la matematica babiloniană, la cea egipteană și, apoi, bineînțeles, să admirăm pe matematicienii greci. Apoi, din aproape în aproape să ajungem la Georg Cantor care, introducând în matematica infinitul actual, ne-a apropiat chiar de Dumnezeu!

-Planul e aprobat, să vedem numai cum o vom scoate la capăt!



*„Esența matematicii este libertatea ei”*

*G. Cantor*

- Cu vreo 5000 de ani în urmă, babilonienii au început să-și noteze, pe tăblițe de argilă arse, nu numai evenimentele politice și sociale, ci și o mulțime de calcule și unele însemnări de natură geometrică. Au arătat aceasta, săpăturile arheologice, începute pe la mijlocul secolului al XIX-lea. Au fost scoase astfel la iveală vreo 300 de tăblițe cuprinzând însemnări de natură matematică teoretică și practică. Printre acele consemnări teoretice, să ne oprim la una, scrisă prin mileniul al doilea î.e.n. cunoscute sub numele de „Plimpton 322”.

- Ea cuprinde, înscrise pe patru coloane valori ale numerelor  $a, b, c$  legate prin relația:  $c^2 = a^2 + b^2$ , cu alte cuvinte cunoscuta legătură dintre laturile unui triunghi dreptunghic.

- Iată, așadar, o dovadă de netăgăduit că babilonienii cunoșteau teorema, pe care Pitagora a făcut-o cunoscută grecilor.

- În tabela amintită, prima coloană indică numărul liniilor respective, - de toate 15, - a doua cuprinde pe  $c$ , a treia pe  $b$ , și a patra pe  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ . Mă întreb, ce l-a îndemnat pe acest matematician să execute aceste calcule anevoioase pentru 15 valori diferite ale numerelor  $a, b$  și  $c$ ? Căci ele nu au fost făcute în vederea vreunei aplicații practice, ci numai pentru plăcerea de a le fi executat.

- E adevărat, aceste calcule erau o cărare a minții pentru liniștirea și delectarea sufletească, a unora dintre acei ce locuiau în temple, o cărare paralelă cu aceea care duce spre divinitate. Și numai bucuria pe care a cunoscut-o realizând aceste calcule, trebuie să-l fi îndemnat să le înscrie pe acea tăbliță de argilă.

- Iată încă două, de pe vremea lui Nabucodonosor. Una cuprinde următoarele serii numerice:



$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023 \text{ și}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = [1 - (1/3) + 10 \cdot (2/3)] \cdot 55 = 385,$$

iar cealaltă valoare a lui  $\sqrt{2}$  calculată prin două aproximări, una în sistemul sexagesimal și cealaltă în sistemul zecimal:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414213.$$

- Însuși faptul că babilonienii au stabilit două sisteme diferite de numărare, acela cu baza zece și acela cu baza șaiszeci, dovedește interes și dragoste pentru numere și numărare. Dacă mai adăugăm că și algebra făcea parte din cunoștințele lor matematice, nu ne putem îndoii că matematica era folosită de slujitorii templelor ca o practică spirituală.

- Iată și o problemă de geometrie teoretică, rezolvată cu ajutorul calculului algebric, care întărește observația matală:

„Am adunat de șapte ori latura pătratului meu cu de unsprezece ori aria lui și am obținut 6,15. Află latura pătratului”. Răspunsul este dat de ecuația de gradul al doilea:  $7x + 11x^2 = 6,15$  pe care babilonienii știau să o rezolve, cum știau să rezolve și unele ecuații de gradul trei sau patru.

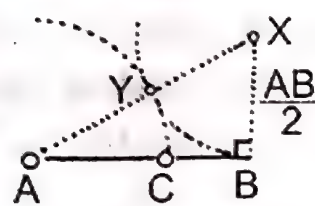
- Să ne îndreptăm și spre templele preoților egipteni, căci venerația lor față de matematică se dovedește prin construirea piramidelor. Metodele folosite de ei în acest scop, precum și cunoștințele lor, au rămas în mare parte până azi secrete. De altfel o afirmă chiar și titlul manuscrisului lui Ahmes: „Instrucțiuni pentru a cunoaște toate lucrurile secrete”, deși, în acest manuscris se găsesc, în cea mai mare parte, numai probleme practice.

- Piramidele! Din însăși construcția lor se degajă un sentiment de admirație de măreție, care îndeamnă sufletul să se îndrepte înspre divinitate. Uriașa piramidă a lui Keops, cu baza un pătrat de latură 230 metri, și având o înălțime de aproape 148 metri, rămâne o ofrandă veșnică oferită de preoții egipteni zeilor lor. Ea este o mărturie a faptului că printre slujitorii din temple mulți erau vrăjiți



de taina numerelor și a combinațiilor lor, de taina figurilor geometrice care i-au condus să descopere și o minunată proprietate a unui raport dintre două segmente, cunoscute azi sub numele de *tăietura de aur*.

- Hai să precizăm că prin *tăietura de aur* se înțelege raportul dintre două segmente  $AC$  și  $CB$ , determinate pe segmentul  $AB$  de punctul  $C$ , astfel ca să existe proporția:  $AB/AC = AC/CB$  (1).



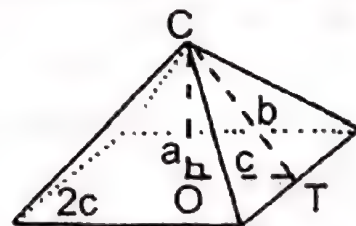
Adică, segmentul mai mare  $AC$  este medie proporțională între segmentul întreg  $AB$  și celălalt  $CB$ . Dacă notăm aceste segmente:  $AB = a$ ,  $AC = b$ ,  $CB = c$ , atunci (1) devine:  $a/b = b/c$  (2),

unde  $a = b + c$ .

Raportul  $b/c = \Phi$  (fi) a fost numit **numărul de aur** și acum se notează de obicei cu litera grecească,  $\Phi$  în amintirea numelui sculptorului Fidias, care a folosit acest raport în realizarea nemuritoarelor sale opere, din care se degajă o tainică armonie.

- Atunci să tragem și concluzia: înlocuind în (2) pe  $a = b + c$ , avem:  $(b + c)/b = b/c$  sau:  $1 + (c/b) = b/c$  și fiindcă  $b/c = \Phi$ , rezultă:  $1 + \Phi^{-1} = \Phi$  sau  $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$  (3) și  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,61\dots$

Că egiptenii au cunoscut taina acestui raport o știm de la Herodot. El a scris că a aflat de la preoții egipteni, că forma maiestră a piramidei lui Keops se datorește faptului că aria triunghiului uneia dintre fețele laterale este egală cu aria pătratului care are drept latură înălțimea piramidei. Rămâne să verificăm: să notăm cu  $a = OC$ , înălțimea piramidei și cu  $2c$  latura pătratului bazei piramidei. Fie  $OT = c$ , o catetă a triunghiului dreptunghic  $TOC$ . Apotema piramidei, adică înălțimea unei fețe laterale a ei este  $b = CT$ . După indicațiile lui Herodot, avem:  $bc = a^2$  (4),





dar  $b^2 = a + c^2$  (5), așa că, ținând seama de (4), rezultă:  $b^2 - bc - c^2 = 0$ , sau  $(b/c)^2 - (b/c) - 1 = 0$  (6). Ori, ecuația (6) este identică cu relația (3) care caracterizează *tăietura de aur*.

- Nici acum nu se poate bănuî prin ce metodă au ajuns preoții egipteni la această relație, un singur lucru este clar, că liniștea din lăuntrul templelor era prielnică înălțării sufletului înspre meditații tainice, care să-1 lege de divinitate și de matematică.

- Preocuparea pentru sacru ar mai putea fi găsită și în modul de a scrie numerele. Egiptenii au folosit două sisteme de notații zecimale, unul fiind sistemul hieroglific și altul sistemul sacru sau hieratic.

În acesta din urmă existau semne speciale prin care se înlocuiau grupurile de semne ce se repetau ca atare dacă se folosea scrierea hieroglifică. În felul acesta scrierea hieratică era mai simplă, dar numai pentru inițiați.

- Așa fiind, pare explicabil faptul că grecii care au învățat primele elemente de matematică de la egipteni și babilonieni, au despărțit de la început noțiunile de matematică practică necesare în rezolvarea problemelor legate de activitatea zilnică, economică, de studiul matematicii pure, care îndrepta înspre meditație. Ele aveau, dealtfel, și numiri deosebite, pe de o parte: „*arta de a calcula*” sau „*Logistica*” și „*arta măsurătorilor geometrice*” sau „*Geodezia*”, iar pe de altă parte, Aritmetica și Geometria. Logistica nu avea nici un fel de legătură cu Aritmetica. La fel, geodezia măsura suprafețele și volumele figurilor și ale corpurilor, pe când geometria studia forma figurilor geometrice independent de considerațiile asupra mărimilor lor.

- Matematica grecească începe cu Thales din Milet, în secolul al VI-lea î.e.n. Despre el se spune că era negustor și, în această calitate, a călătorit mult, până a ajuns în Egipt. Acolo a făcut cunoștință cu preoții egipteni și a fost inițiat în taina religiei și a matematicii.



- Da, odată ce a cunoscut adevăruri divine, desigur că nu l-a mai putut interesa negustoria și a părăsit această ocupație. Întors la Milet el s-a dedicat studiului geometriei și al filosofiei. A devenit unul din cei șapte înțelepți ai antichității, lui atribuindu-i-se primele descoperiri matematice precise. Astfel în geometrie el a stabilit că: 1) unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt egale; 2) un triunghi este bine determinat dacă i se cunoaște baza și unghiurile alăturate ei; 3) laturile triunghiurilor care au unghiurile egale sunt proporționale; 4) unghiurile înscrise într-un semicerc sunt drepte.

- Despre această ultimă teoremă se spune că Thales a fost așa de impresionat de descoperirea ei, încât a adus jertfă un taur, ca să mulțumească zeilor că i-au arătat-o.

- Trebuie să fii cu adevărat dezlegat de măruntele preocupări zilnice ca să te poată copleși frumusețea acestui adevăr veșnic: oricare ar fi cercul, dacă alegi un punct pe el, și-l unești cu extremitățile unui diametru care nu trece prin el, obții un unghi drept! Surpriza pe care ți-o provoacă acest rezultat o depășește pe oricare alta determinată de un fapt divers și-ți îndreaptă gândul spre divinitatea care se manifesta în sufletul lui Thales sub forma zeilor.

- Dacă vrei, am putea citi câteva rânduri dintr-un articol al lui H. Poincaré, intitulat: „*Invenția matematică*” pe care eu l-aș fi intitulat, mai degrabă, „*Descoperirea matematică*”.

Asupra acestei probleme a deosebirii dintre invenție și descoperire matematică trebuie numaidecât să revenim, natural, nu acum, când te rog să iei cartea și să citești.

- „*Invenția matematică este actul prin care spiritul omului pare să împrumute cel mai puțin din lumea exterioară, în care nu acționează sau nu pare să acționeze, decât prin el însuși și asupra lui însuși, astfel că studiind procesul gândirii geometrice, putem spera să atingem ceea ce este mai esențial în spiritul omenesc*”. Și mai departe: „*Pare curios să se invoce sensibilitatea în demonstrațiile matematice care, se pare că interesează numai inteligența. Ar însemna să uităm sentimentul frumuseții matematice, al armoniei*



*numerelor și formelor și eleganței geometrice. Este un adevărat sentiment estetic pe care-l cunosc toți matematicienii adevărați. Și aceasta este sensibilitate" (9).*

- Pitagora era mai tânăr decât Thales cu vreo 50 de ani. S-a născut în insula Samos, aproape de Milet și a călătorit prin Egipt și Babilon, mai înainte de a se stabili la Croton, unde și-a înființat prima lui școală, care avea ca deviză: „*Totul este număr*”. Însă Pitagora considera că numai numerele întregi sunt „*numere*”, celelalte numere fracționare sau iraționale, erau privite ca „*mărimi*”, pentru că ele proveneau din anumite măsurători. Numărul întreg era o noțiune primordială, de natură divină, un izvor mistic religios, exprimând însăși esența lucrurilor. Se cunoaște și o rugăciune care îi era adresată: „*Binecuvântează-ne număr divin, Tu care ai născut pe Zei și pe Oameni*”.

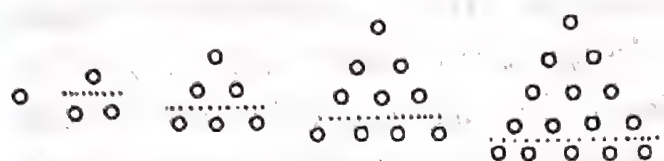
- Încă de pe vremea lui Aristotel, propoziția „*Totul este număr*”, exprimată și sub forma: „*Toate lucrurile posedă numere*”, sau că: „*Toate lucrurile sunt numere*”, constituia un paradox, observă L. Brunschvieg, căci numărul este o noțiune iar lucrurile sunt obiecte sau substanțe.

Cum s-ar putea pretinde ca numărul să fie la rândul său obiect ori substanță? Și iată cum rezolvă Brunschvieg dilema: „*în loc de a căuta trecerea de la o noțiune abstractă la realitatea concretă... i se poate reintegra numărului aplicația intuitivă de care el este neseplat, de a vedea un punct când se vorbește de unitate, iar când se vorbește despre numere, un grup de puncte desenând o figură, așa cum desenează stelele o constelație. Înainte de a spune că lucrurile sunt numere, Pitagoricienii au conceput numerele ca lucruri, expresiile „numere pătrate” sau „numere triunghiulare” nu erau metafore, aceste numere erau efectiv, în fața ochilor și a spiritului lor, pătrate și triunghiuri*” (10).

- Reprezentând numerele prin pietricele, Pitagora a stabilit legi numerice între puncte și numere, care ne impresionează fie prin simplitatea fie prin armonia pe care o exprimă. De pildă, numerele



triunghiulare erau obținute adăugând la baza triunghiului format din trei pietricele altele trei, apoi la următorul alte patru pietricele.


 Numerele astfel formate sunt:  
 $1, 1 + 2 = 3; 1 + 2 + 3 = 6; 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \dots$  și, în general:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$ .

Din formula generală a numerelor triunghiulare apare că aceste numere reprezintă chiar aria triunghiului a cărui bază este numărul  $n$  și înălțimea  $(n+1)$ .

- Numerele pătrate se obțin începând prin a așeza în jurul unității „*gnomonii numerelor impare succesive*”, ca să folosesc termenul „*gnom*”, instrument antic format dintr-un par înfipt perpendicular în pământ, astfel ca el să formeze un unghi drept cu umbra lui.

Relația dintre aceste numere apare ca suma numerelor impare succesive:  $1, 1 + 3 = 4 = 2^2$ ,

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2, \dots, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ .

- Așadar, un rezultat remarcabil: suma primelor  $n$  numere impare este egală cu  $n^2$ .

- În mod analog se formează numerele pentagonale, care rezultă din reunirea a trei numere triunghiulare, sau numerele hexagonale ce se formează prin alăturarea a patru numere triunghiulare etc.

Formula acestor nume-

re a fost găsită de Hipsicle din Alexandria și se exprimă prin formula generală:  $N_{n,m} = (n/2)[2 + (n-1)(m-2)]$ , în care  $n$  este numărul de ordine al numărului respectiv, iar  $m$  arată numărul latu-



$$\begin{array}{l} N_{2,5} = 5 \\ \hline N_{3,5} = 12 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} N_{2,6} = 6 \\ \hline N_{3,6} = 15 \end{array}$$



rilor poligonului. Așadar, pentru numerele pentagonale, rezultă formula:  $N_{n,5} = (n/2)(3n - 1)$ .

- Pitagoricienii s-au adâncit în studiul numerelor întregi, fiind impresionați de relațiile ce le-au stabilit între numere și divizorii lor. Ei au numit **număr prim** acela care se divide numai cu el însuși și cu unitatea și **număr compus** acela care are și alți divizori. De la aceste noțiuni ei au ajuns la definirea **numerelor perfecte**, a **numerelor prietene**, precum și la **teoria proporțiilor** și a **armoniei muzicale**. Să vedem, mai întâi, care numere se numesc perfecte.

Numerele perfecte sunt acelea care se exprimă prin suma divizorilor lor. De pildă:  $6 = 1 + 2 + 3$  sau  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ . În Aritmetica lui Nicomah din Gherasa, scrisă în veacul al II-lea e.n., se mai găsesc și numerele 496 și 8128.

- Dar în cartea a IX-a a Elementelor lui Euclid se dă formula generală pentru aflarea unui număr perfect, anume:  $n_t = 2^t(2^{t+1} - 1) = 2^t p$ , unde  $t$  este un număr natural, iar  $p = 2^{t+1} - 1$  este un **număr prim**. Din această formulă rezultă că primele patru numere perfecte sunt: pentru  $t = 1$ ,  $n_1 = 6$ ;  $t = 2$ ,  $n_2 = 28$ ;  $t = 4$ ,  $n_4 = 496$ ; și  $t = 6$ ,  $n_6 = 8128$ . Problema aceasta a încântat pe mulți matematicieni și ea a fost cercetată în decursul Evului Mediu, dar abia în secolul al XV-lea Regiomontanus a reușit să calculeze al cincilea număr perfect 33.550.336, pentru  $t = 13$ . Alte două numere  $n_{17}$  și  $n_{19}$ , ultimul având 12 cifre au fost stabilite în secolul al XVI-lea de J. Scheybel, acela care a tradus în limba germană pe Euclid, apoi Marsenne a determinat, în secolul al XVII-lea al optulea număr perfect pentru  $t = 31$ , anume  $n_{31} = 2.305.834.008.139.952.128$ , care, cum se vede, are 19 cifre.

- Dar căutarea numerelor perfecte nu s-a oprit aici. Euler a regăsit, în 1750 pe  $n_{31}$  fără să fi cunoscut rezultatul anunțat de Marsenne în 1644. Ultimul număr despre care avem cunoștință a



fost calculat cu ordinatorul în 1964, are 3376 cifre și a fost imprimat pe 12 pagini.

- Iată un alt exemplu de muncă multă și gratuită, executată numai pentru bucuria de a o fi făcut, așa cum se întâmplă și când scrii o poezie sau când faci o rugăciune: „*Binecuvântează-ne, număr divin*”.

- Tot așa de mult au captivat și **numerele prietene**. După cum știi, numirea lor este legată de povestea a doi prieteni care i-au cerut lui Pitagora să le definească prietenia și Pitagora a răspuns: „*Sunteți ca numerele 220 și 284*”. Nedumeriți de răspuns, li s-a indicat să stabilească divizorii acestor numere, și ei au găsit că numărul 220 are ca divizori pe: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, iar numărul 284 are ca divizori pe: 1, 2, 4, 71, 142. Făcând suma divizorilor lui 220 au aflat numărul 284 și procedând la fel cu ceilalți divizori au găsit numărul 220. Atunci au înțeles ei, că fiecare poartă în suflet tot ce-l preocupă pe celălalt, adică este ca și eul celuilalt.

- Cu toată străduința celor pasionați de calcule, această pereche a rămas singură până în secolul al XVII-lea. Atunci a descoperit Fermat o nouă pereche de numere prietene și anume:  $A = 17.296$  și  $B = 18.416$ .

Peste doi ani, a găsit și Descartes alte două numere prietene și anume:  $A = 9.363.584$  și  $B = 9.437.056$ .

Ambele rezultate au fost publicate de Mersenne în 1644. Peste un secol, în 1747, Euler a publicat un articol, intitulat „*Despre numerele prietene*” în care adaugă, la cele trei perechi cunoscute, alte 30 de perechi noi, prima fiind  $A = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$ ,  $B = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$ , iar ultima:  $A = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 179$  și  $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359$ .

Peste trei ani el a mai găsit încă alte 29 de perechi de numere prietene, iar în 1939 numărul perechilor de numere prietene a ajuns la 390 !



- Tot lui Pitagora îi revine și meritul de a fi stabilit o relație numerică prin care este exprimată **armonia muzicală** prin rapoarte de numere naturale. Povestea spune că atenția lui Pitagora ar fi fost atrasă de sunetele care se auzeau în atelierul unui potcovar, provocate de izbirea ciocanelor de nicovală. Intrând în curtea potcovarului, el a văzut patru sclavi, care loveau pe rând nicovala cu câte un ciocan de mărime și greutate diferită. Privindu-i a înțeles că trebuie să existe o legătură între sunetele emise de nicovală și greutatea ciocanelor care o izbeau. În locul ciocanelor Pitagora a folosit coarde vibrante, fixate la ambele capete. El a stabilit astfel că tonul emis de o coardă bine întinsă depinde de lungimea coardei care vibrează. Dacă în locul coardei întregi face să vibreze numai o jumătate de coardă, atunci tonul se ridică cu o octavă, dacă vibrează numai  $2/3$  din coardă, tonul se ridică la  $1/5$  deasupra aceluia produs de coarda întreagă (cvinta), iar dacă vibrează  $3/4$  din lungimea ei, tonul este cu  $1/4$  deasupra sunetului produs de coarda întreagă (cvartă). Cu aceste date Pitagora a construit scara diatonică și a formulat astfel prima teorie matematică despre armonia muzicală, care adevărește că natura intrinsecă a sunetelor este legată de raportul dintre două numere întregi.

Pornind de la rapoartele a două numere, Pitagora a stabilit și teoria numerică a proporțiilor. Ea a fost reluată de Euclid și, în cartea a VI-a a Elementelor, găsim definiția 20, formulată astfel: „Numerele sunt proporționale când întâiul este același multiplu sau aceeași parte sau aceleași părți a celui de-al doilea ca al treilea față de al patrulea” (11). Printre proporții, Pitagoricienii au cercetat mai îndeaproape unele de natură particulară, compuse din trei numere în loc de patru, stabilind astfel anumite medii dintre două numere date. Prin felul cum aceste medii formează cu cele două numere date o proporție, au fost luate în seamă: **media aritmetică**  $m_a$ , definită prin proporția:  $(a - m_a)/(m_a - c) = a/a$ , de unde  $m_a = (a + c)/2$ ; **media geometrică**  $m_g$ , definită prin proporția:  $a/m_g =$



$= m_g/c$ , de unde  $m_g = \sqrt{ac}$  și *media armonică*  $m_h$ , definită prin proporția:  $(a - m_h)/(m_h - c) = a/c$ , de unde  $m_h = 2/(a^{-1} + c^{-1}) = 2ac/(a + c)$ .

- E clar că aceste valori medii între două numere  $a$  și  $c$  nu sunt egale, media aritmetică fiind mai mare decât media geometrică.

- Să mai observăm și că media armonică este legată de *consonanța muzicală*. Într-adevăr, dacă se consideră lungimea coardei vibrante caracteristică unui sunet ca unitate de lungime, atunci media armonică dintre lungimea coardei și aceia a jumătății ei (adică a octavei aceluși sunet) este:  $m_h = (2 \cdot 1 \cdot 2^{-1})/(1 + 2^{-1}) = 2/3$ , care reprezintă lungimea coardei ce corespunde cvintei sunetului. Combinând cele trei medii ale celor două mărimi date  $a$  și  $c$ , Pitagora a pus condiția ca  $m_g$  să fie medie proporțională între  $m_a$  și  $m_h$ :  $m_g/m_h = m_a/m_g$  sau  $\sqrt{a \cdot c} \cdot [(a + c)/(2 \cdot a \cdot c)] = (a + c)/2 \cdot (\sqrt{a \cdot c})^{-1}$  sau  $a \cdot [(a + c)/(2 \cdot a \cdot c)] = [(a + c)/2] \cdot c^{-1}$ . Ori, considerând  $a = 1$  și  $c = 1/2$  se obține o proporție între cele patru distanțe care despart sunetele fundamentale din gama diatonică: lungimea fundamentală (1), octava ( $1/2$ ), cvinta ( $2/3$ ) și cvarta ( $3/4$ );  $1/[(2 \cdot 1 \cdot 2^{-1})/(1 + 2^{-1})] = [(1 + 2^{-1})/2]/(1/2)$  sau  $1/(2/3) = (3/4)/(1/2)$ . Această proporție se numește *proporția perfectă* sau *proporția muzicală*.

- Am putea zăbovi mult asupra frumoaselor proprietăți ale numerelor întregi, ca de pildă asupra numărului 10, decada, care cuprinde primele patru numere:  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ , așadar natura diferitelor specii de numere. El este format din atâtea numere pare cât și impare: (1, 3, 5, 7, 9) și (2, 4, 6, 8, 10); el cuprinde tot atâtea numere prime ca și neprime (1, 2, 3, 5, 7) și (4, 6, 8, 9, 10), este un număr triunghiular și tot odată suma primelor trei numere triun-



ghiulare:  $10 = 1 + 3 + 6$ . Pitagoricienii considerau că Dumnezeu a orânduit universul prin numere, El fiind unitatea iar lumea pluralitatea. De aceea, ei considerau că ridicarea sufletelor ca să se unească cu Dumnezeu se putea realiza cu ajutorul matematicii care exprimă armonia. Numai armonia restaurează unitatea părților componente și le modelează în cosmos. Armonia se exprimă prin rapoarte numerice iar acela care și-a însușit înțelegerea armoniei, devine el însuși divin și nemuritor.

- Dar odată cu această armonie, pitagoricienii au cunoscut și cea mai groaznică dezamăgire, atunci când Hippias din Metopont a arătat că există mărimi ce nu se pot exprima prin rapoarte dintre două numere întregi.

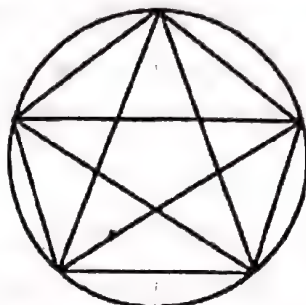
- Da, teorema lui Pitagora, departe de a fi fost o teoremă demnă de adorat, a fost pricina tulburărilor legate de prezența, printre numere, a **numărului irațional**. Căci, pornind de la pătratul de latură 1, Hippias a arătat că lungimea diagonalei sale nu se poate exprima nici printr-un număr întreg și nici prin raportul dintre două numere întregi, cu alte cuvinte diagonala pătratului de latură 1, este **incomensurabilă** cu latura lui. Nu mă pot opri să nu amintesc demonstrația, prin reducere la absurd, pe care a dat-o Aristotel, deși nu-i exclus ca ea să aparțină chiar școlii pitagoriciene. Iat-o: Diagonala pătratului de latură 1 este  $\sqrt{2}$ . Să presupunem că  $\sqrt{2} = a/b$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere întregi, iar  $a/b$  este o fracție ireductibilă. Ridicând la pătrat, avem:  $2b^2 = a^2$ . De aici rezultă că  $a$  este par, deci fie  $a = 2c$ . Înlocuind, găsim:  $b^2 = 2c^2$ , așadar și  $b$  este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza, deci fracția nu a fost ireductibilă cum s-a presupus.

- Dezvăluind acest secret al numerelor iraționale, Hippias a fost pedepsit de zei și a murit într-un naufragiu. Pitagoricienii însă nu s-au mărginit la acest singur număr irațional, ei au cunoscut și folosit și altele ca de pildă numărul de aur  $\Phi$ , fără de care nu s-ar putea înscrie pentagonul regulat în cerc. Ei au cunoscut această



construcție. Mai mult, ducând diagonalele acestui pentagon se obține *pentagrama*, figură pe care pitagoricienii și-au însușit-o drept emblema.

- Figura din dreapta se poate trasa dintr-o singură trăsătură de condei și Iamblic povestește despre un pitagorician bolnav și sărac care cu toată îngrijirea



pe care i-a dat-o hangiul unde ajunsese, a murit acolo. Neavând cu ce plăti hangiului, i-a cerut o tăbliță pe care a desenat pentagrama și l-a rugat pe hangiu să o atârne pe perete. Mai târziu trecând pe acolo un alt pitagorician și aflând povestea pentagramei, l-a răsplătit pe hangiul omenos.

- Aș aminti că în Evul Mediu înscrierea pentagonului în cerc era un secret al pictorilor.

- Desigur, căci geometria lui Euclid a fost cunoscută în Europa abia în secolul al XVI-lea.

Fiindcă ne-am îndreptat înspre geometria pitagoriciană, să amintim că atunci când ei au descoperit trei dintre cele cinci poliedre regulate, anume tetraedrul, cubul și dodecaedrul, au adus drept mulțumire zeilor un taur pe care l-au sacrificat !

- Nu-i de mirare, poliedrele regulate, în număr de cinci celelalte două: octaedrul și icosaedru se spune că au fost construite de Theatet din Atena, elev a lui Teodor din Cirena), sunt figuri mărginite de poligoane regulate și egale între ele și se pot înscrie într-o sferă, toate având o frumusețe remarcabilă.

- Despre cub, care are 6 fețe, 8 vârfuri și 12 muchii, pitagoricianul Philolaus afirma că aspectul lui armonios se datorește faptului că numerele 6, 8 și 12 formează o proporție armonică:  

$$8 = (2 \cdot 6 \cdot 12) / (6 + 12).$$

- „S-ar putea spune”, observă Bourbaki, „că Platon era, aproape obsedat de matematică, fără a fi fost el însuși un creator



în acest domeniu. El era la curent cu toate descoperirile matematicienilor contemporani, mulți dintre ei fiind prieteni sau elevi ai lui cărora uneori le sugera chiar noi direcții de cercetare... Sub condeiul lui matematica a folosit ca ilustrare sau ca model (și, uneori, a alimentat chiar, ca și Pilagoricienii, înclinarea înspre misticism)." (12).

- Același autor scrie mai departe: „conform cu vederile lui metafizice, Platon prezintă matematica drept o cale de a ajunge "la adevărul în sine" și la faptul că "obiectele" cu care se ocupa au o existență proprie în lumea ideilor" (l. c. pag. 24). Într-un pasaj din „Republica”, precizează chiar și în ce constă metoda matematică.

- Să-l cităm în traducerea lui Noica: „Cred că tu știi că geometrii, aritmeticienii și cei ce se îndeletnicesc cu astfel de lucruri, după ce postulează imparul și parul, formele și cele trei feluri de unghiuri, cât și cele înrudite cu acestea, potrivit cu fiecare dintre metode, le consideră pe acestea "postulate" presupunându-le cunoscute și nu cred de cuviință să le explice nici lor înșiși, nici celorlalți, socotindu-le cu totul evidente. Pornind de la acestea parcurg tot restul și sfârșesc prin a cădea de acord asupra chestiunii pe care intenționează să o cerceteze..." (13).

- Platon a fost foarte impresionat de faptul că există numai cinci poliedre regulate și că există o infinitate de poligoane regulate. El a considerat că Dumnezeu, când a creat lucrurile din amestecul în care se aflau, le-a dat cea mai mare perfecțiune posibilă. El a compus astfel, cele patru elemente ale Universului: focul, aerul, apa și pământul dându-ne ca model forma celor patru corpuri geometrice perfecte și anume a tetraedrului care reprezintă focul, a icosaedrului - apa, a octaedrului - aerul și a cubului - pământul. Despre dedocaedru a scris: „rămâne încă o combinație, a cincia, care să-i deseneze epura, zeii au luat-o ca modelul Universului”.

- Deși nu a fost matematician, Platon a considerat că studiul geometriei este necesar în filosofie și de aceea a scris pe poarta de la intrare în grădina sa: „Nimeni nu intră aici, dacă nu-i geometru”.



În „*Republica*” găsim: „*Geometria este știința a ceea ce veșnic este. Ea reprezintă un mijloc de a atrage sufletul spre adevăr și de a pregăti inteligența filosofului să îndrepte în sus facultățile pe care, în chip nepotrivit, le îndreptăm în jos*” (1.c.13. pag. 329 ).

O cercetare mai amănunțită a dialogurilor lui Platon a stabilit că există cel puțin 120 pasaje în care Platon se referă la chestiuni privind matematica. Tot din „*Republica*” sunt și aceste afirmații: „*Calculul și Aritmetica sunt în întregime legate de număr... deși aceste discipline apar ca fiind în stare să conducă spre adevăr*”; însă, adaugă tot el mai departe: „*nu folosind calculul în chip profan, în vederea vânzării și cumpărării, precum negustorii și precupeții... ci astfel ca să se ajungă la contemplarea naturii numerelor cu ajutorul intelectului... pentru a face sufletul însuși pregătit să se întoarcă lesne dinspre devenire către adevăr și ființă*” (1. c. pag. 326).

- Geometrul grec, spune Boutroux, „*nu urmărește lucrurile complicate. Scopul lui nu-i să-și frământa mintea, să folosească șiretenii ca să ajungă la cunoașterea faptelor puțin accesibile, a căror complicație însăși este un semn de impuritate*” (1.c.8.pag.50).

- Într-adevăr, Platon, nici nu considera că figurile geometrice ar avea nevoie de o reprezentare grafică, dat fiind că raționamentul geometric nu se referea la figurile desenate, căci imaginea desenată nu corespundea aceleia din minte. Totuși, pentru ca să se stabilească un criteriu precis, după care să se poată construi figurile, s-a plecat de la faptul că prin două puncte se poate duce o dreaptă și, dacă se cunoaște centrul și raza unui cerc, acel cerc se poate construi. Așadar, s-a tras concluzia că o figură plană se poate construi numai cu rigla și compasul.

- De aici au început toate discuțiile de mai târziu, între geometrii greci care, neputând desena în acest mod, anumite figuri, au recurs la alte mijloace de a le desena, mijloace pe care cei conservatori nu le acceptau !

- Aristotel a fost elevul lui Platon. Și el recunoaște că: „*Actul propriu al omului fiind gândirea, fericirea se poate dobândi prin*



*activitatea ei dusă la cea mai înaltă perfecțiune, care nu poate fi atinsă decât în stare de contemplare intelectuală, când gândirea se are numai pe sine obiect al cugetării sale. Atingând acest moment de interiorizare și înălțare teoretică, sufletul omenesc se unește cu inteligența divină și trăiește cu aceasta, în ea, imobil, impasibil, nemuritor”(14).*

- Eu zic să ne oprim aici. Pentru o nouă discuție cred că ar fi interesant să vedem cum au pătruns matematicile în lumea creștină. Despre această problemă a scris și Paul Tannery așa că, data viitoare voi aduce cu mine volumele sale în care am găsit referiri la acest subiect.



*„Frumusețea intelectuală își este ei însăși  
suficientă și pentru ea, savantul se  
condamnă la munci grele și penibile”*

*H. Poincaré*

- Într-unul din studiile sale asupra istoriei matematicii, Paul Tannery se ocupă de religia ultimilor matematicieni din antichitate și constată că printre comentatorii lucrărilor de matematică rămase de la greci, se găsesc și mulți creștini (15). De pildă, spre sfârșitul secolului al treilea a trăit Anatolius, mai târziu episcop în Laodiceea. Deși, el a predat la Școala din Alexandria filosofia aristotelică, era un adânc cunoscător al matematicii clasice și, printre altele, a scris vreo 10 cărți de introducere în aritmetică. Din fragmentele care au rămas din ele, se poate stabili că aceste cărți reprezentau lucrările elementare destinate studenților în filosofie și aveau ca subiect diferite ramuri din matematică. De pildă, într-una dintre aceste lucrări se găsesc elemente de algebră, compuse după aritmetica lui Diofant și chiar dedicate „*ereticului Diofant*”. Paul Tannery observă că între „*eretici* și „*creștini*”, cu toată lupta dintre ei, existau asemenea relații de prietenie, în particular, în acest caz și Diofant, la rândul lui, a dedicat tratatul său de aritmetică în 13 volume, dintre care azi nu au mai rămas decât primele șase, lui Dionisios, episcop de Alexandria între 247-265, azi cunoscut sub numele de Denis din Alexandria, care între anii 231-247 a fost conducătorul studenților creștini din școala din Alexandria și profesorul lui Anatolius. Iată și dedicația lui Diofant: „*Cunoscând, prea onorate Dionisios, cât de mult vă pasionează problemele numerice, am început printr-o explicație asupra naturii numerelor și a fundamentelor pe care se bazează subiectele tratate. Acestea pot părea, la prima vedere, foarte grele de înțeles, căci nu sunt deloc cunoscute. Începătorii se pot descuraja ușor, dar pentru dumneavoastră vor fi ușor de înțeles,*



datorită entuziasmului dumneavoastră și explicațiilor mele”. Această dedicație îl face pe Paul Tannery să se întrebe dacă nu cumva, aceste volume au fost scrise de Diofant chiar la îndemnul lui Dionisios, atunci când acesta era conducătorul studenților creștini.

- Lucrul nu-i imposibil, fiindcă după câte văd, Tannery mai aduce un argument foarte serios în favoarea acestei ipoteze, anume că Diofant „*pune toate problemele numerice (afară de una singură) sub formă abstractă și rupe astfel cu tradiția de a învălui enunțurile în istorioare, ca de pildă acelea a epigramelor din Antologie...* Dacă ținem seamă că acele istorioare, folosite în enunțuri, erau luate, în cea mai mare parte, din mitologie, se înțelege că, dacă lucrarea era dedicată în realitate studenților creștini, Dionisios și Diofant au ținut să-i îndepărteze pe studenți de asemenea atracții. Ar fi un exemplu de faptul că scrupulul religios a contribuit efectiv la procesul abstracției științifice” (l. c. pag. 537).

- Un alt matematician creștin, care a trăit în Alexandria, la începutul secolului al VI-lea, a fost Ioan Philopon. Printre altele, el a scris un comentariu asupra Aritmeticii lui Nicomah. Pe atunci, Școala din Alexandria avea încă un caracter mixt, din punct de vedere religios, dar, mai târziu, ea a devenit pe deplin creștină.

- Printre matematicienii creștini din Bizanț, se afla, la începutul secolului al VI-lea Antemiu din Trales, probabil, conducătorul școlii de arhitecți înființată de Justinian și din cadrul căreia au fost cei care au clădit Sf. Sofia. Antemiu avea reputația de mare matematician și, de aceea, i se spunea și Arhimede din Trales, însă din lucrările lui nu au mai rămas decât fragmente. Lui îi sunt dedicate „*Comentariile lui Eutokios asupra Conicelor lui Apolloniu*” și tot Eutokios a dedicat „*Comentariile asupra lui Arhimede*” unui anume Petre, nume purtat atunci numai de creștini; Tannery bănuiește că și Eutokios a fost creștin.

În Occident, după marile invazii care au dezbinat Imperiul Roman, studiul matematicii s-a putut continua numai în interiorul mănăstirilor, singurul loc unde se menținea pacea prin citirea rugă-



ciunilor și a cărților sfinte. Însă majoritatea textelor matematice fuseseră luate de arabi și în bibliotecile de acolo rămăseseră puține dintre textele de seamă. Dar atâtea câte erau, au fost folosite de călugări care le copiau și căutau să compună chiar și alte lucrări cu caracter matematic care să folosească învățământului în școlile din lăuntrul mănăstirilor. Printre autorii creștini, ale căror lucrări au avut o influență importantă asupra învățământului matematic din școlile medievale până la sfârșitul secolului al XI-lea, a fost și A.M.S. Boetius (480-524) născut la Roma. A avut mai multe funcții importante în conducerea statului dar, căzând în dizgrație, a fost închis și apoi ucis. În închisoare a scris un tratat de filosofie în care discută problema responsabilității morale în lumina părerilor lui Platon și Aristotel. Aritmetica sa, în două volume, pe care a scris-o pe când avea 20 de ani, este o traducere liberă a cărții lui Nicomah. Ea a fost copiată și recopiată de-a lungul unui întreg mileniu și a folosit ca izvor de inspirație pentru toate cărțile scrise după el. A mai compus o astronomie și o geometrie care cuprinde câteva pasaje din primele patru cărți ale Elementelor lui Euclid, fără însă a fi date și demonstrațiile teoremelor enunțate. Și această geometrie a avut multe variante, ea fiind copiată, adăugată sau modificată, de către călugării din diferite mănăstiri.

Un alt călugăr, Cassiodor, a fost elev a lui Boetius, a scris și el pe la începutul veacului al VI-lea, o Aritmetică, în care rezumă aritmetica lui Boetius și, totodată, inserează pasaje din Sf. Scriptură prin care vrea să dovedească că Dumnezeu a creat Universul bazându-se pe noțiunile de număr, măsură și greutate. El consideră acest fapt ca o rațiune suficientă pentru a studia aritmetica.

În jurul anului 600 a apărut „*Etimologiile*”, o enciclopedie în 20 de volume ale savantului episcop Isidor din Sevilla (570-636), volumul al treilea fiind dedicat Aritmeticii, inspirată și ea de Aritmetica lui Boetius. El pune în evidență o mistică a numerelor și consideră că dacă s-ar suprima numărul din toate lucrurile câte există, atunci ar dispărea și lucrurile.



- În secolul al VIII-lea, Carol cel Mare a dezvolt învățământul bisericesc, dispunând să se creeze școli noi pe lângă fiecare mănăstire sau catedrală; în felul acesta s-a dezvoltat și atracția pentru învățământul matematic. Foarte interesante sunt scrisorile cu conținut geometric care s-au schimbat în acea vreme între unii profesori din acele școli și care au fost publicate de Paul Tannery (16). Nu conținutul lor, cu un nivel cât se poate de coborât, „*nedepășindu-l pe acela pe care îl atinseseră grecii înainte de Pitagora*” ne interesează, ci faptul în sine, că acești călugări, profesori și conducători de școală, având o cultură remarcabilă și serioase cunoștințe aritmetice, doreau să restabilească relațiile geometrice pe care nu mai aveau de unde să le afle, dar despre care știau că fuseseră cândva stabilite. Iată obiectivul principal al discuției începute prin 1025, între Ragimbold din Cologne și Radolf din Liege cuprinsă în cele opt scrisori, adresate reciproc. Așa de pildă, una dintre întrebările adresate de Ragimbold este: „*În Comentariul său asupra categoriilor lui Aristotel, Boetius spune: Noi știm că suma celor trei unghiuri interioare ale unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte.*” Ori, urmează Paul Tannery, „*ceea ce-l preocupă pe Ragimbold, nu-i demonstrația acestei teoreme ci semnificația cuvântului interior, căci, dacă Boetius l-a folosit, înseamnă că trebuie să existe și unghiuri exterioare: care sunt acelea?*” Această întrebare îl preocupa mai demult pe Ragimbold; o pusese chiar și episcopului Fulbert când a trecut prin Chartres. Atunci ei admiseseră că *interior* poate însemna *ascuți* pe când *exterior*, *unghi obtuz*.

- Radolf din Liege face altă ipoteză: „*Unghi interior este acela care se referă la o suprafață plană, pe când unghiul exterior, cel ce se leagă de un solid, de exemplu un cub*”. Cum pentru noi nu prezintă acum interes și celelalte întrebări puse în cele opt scrisori, să ne oprim asupra altui profesor, tot din Liege, anume Francon, preocupat de o problemă cu mult mai complicată, anume de cvadratura cercului.



- În 1050 el a scris o lucrare pe această temă, din care se constată, că a aflat de această problemă nu dintr-o carte de Geometrie, ci din Comentariile lui Boetius asupra Categoriilor lui Aristotel, în care autorul se referă la problema respectivă ca la un exemplu de problemă a cărei soluție este posibilă, dar care nu a fost cunoscută decât după moartea lui Aristotel.

- Vrei să spui că Boetius a considerat soluția aproximativă, stabilită de Arhimede drept un rezultat exact ?

- Desigur, și după cum remarcă Paul Tannery, Francon admitea ca exacte și soluțiile grafice stabilite cu ajutorul curbilor mecanice. Dar, ori cum ar fi, Francon consideră problema cvadraturii cercului cu totul altfel decât așa cum o considerăm noi. El credea că aria cercului se determină exact, prin formula transmisă de agrimensorii romani, anume că se înmulțește pătratul diametrului cu 11 și rezultatul se împarte cu 14. Așa că, dacă un cerc are diametrul 14, atunci aria lui este echivalentă cu aceea a unui dreptunghi cu laturile 11 și 14. Iar problema cvadraturii cercului era: „cum să se construiască un pătrat echivalent cu acest dreptunghi ?” Asupra acestei probleme Francon a scris 6 cărți, dar fără a fi ajuns la un rezultat definitiv, căci el nu știa cum se construiește media proporțională între două segmente de dreaptă cunoscute. Și, ceea ce este foarte interesant, Francon a avut și a consultat geometria lui Gerbert, ceea ce înseamnă că această problemă nu era tratată nici acolo.

- Nivelul cunoștințelor matematice a început să crească abia pe la sfârșitul secolului al XI-lea și începutul celui de al XII-lea când, numărul elevilor care alegeau școlile de pe lângă catedrale, mărindu-se foarte tare, s-a pus problema de a se crea Universitățile și, când, totodată, au început să apară primele traduceri în latinește ale cărților de matematică scrise în limba arabă. Printre cei mai renumiți profesori ai Universității din Paris a fost călugărul dominican Jordanus Nemorarius, care a murit în 1237, după ce s-a întors dintr-o călătorie făcută la Locurile sfinte. El este considerat ca înt-



meietorul școlii medievale de mecanică. A scris numeroase cărți de Aritmetică, Algebră, Geometrie ș.a. Tot în secolul al XIII-lea a trăit și Campanus de Novara, canonic de Paris, care a tradus în latinește Elementele lui Euclid, folosindu-se în acest scop de traduceri în limba arabă precum și de o traducere latinească anterioară, a lui Adelard din Bath, făcută cu un secol mai înainte. În secolul al XIV-lea cel mai important matematician, filozof și teolog din Europa apuseană a fost Tomas Brawardin (1290-1349), arhiepiscop de Canterbury. Printre multele cărți pe care le-a scris se află o Aritmetică și o Geometrie; el mai este considerat și ca unul dintre precursorii Calculului diferențial și integral. O altă față bisericească, matematician de seamă, a fost Nicolae Oresme (1325-1382) episcop de Lisieux. În cartea sa „*Algorismus Proportionum*” el se ocupă cu seriile infinite, a introdus noțiunea de indice (exponent) fracționar și a îmbogățit mult terminologia matematică franceză.

- Cu cardinalul Nicolae de Cusa (1401-1464) ne aflăm în plină Renaștere. Și pe el l-a pasionat determinarea ariei cercului, respectiv aflarea numărului  $n$ . El a stabilit o metodă ingenioasă prin care credea că a determinat această valoare; era însă numai o bună aproximare. Tot în Italia, mai întâi ca profesor de matematică la Veneția, apoi la Florența și Roma, îl întâlnim pe călugărul franciscan Luca Pacioli (1445-1514). El a publicat o carte de largă răspândire, anume „*Summa de aritmetica, geometria, proportioni et proportionalita*”, scrisă în limba vorbită. Prieten cu Leonardo Da Vinci, a mai publicat și „*Divina proportione*”, în care toate figurile poligoanelor regulate și ale poliedrelor, legate de tăietura de aur, pe care el a numit-o „*proporție divină*”, au fost executate de Leonardo Da Vinci.

- Tot un mare pasionat de matematică a fost și preotul german Bartolomeus Pitiscus (1561-1613) care a publicat la Frankfurt, în 1613, cartea intitulată „*Thesaurus mathematicus sive canon sinum*”, în care se găsesc calculate de el, Tabelele liniilor trigonometrice din  $10''$  în  $10''$ .



- Deși nu am amintit decât o parte dintre membrii bisericilor creștine care au contribuit, prin pasiunea lor pentru matematică, chiar când în jurul lor domnea haosul și cruzimea războaielor, cred că putem încheia aici discuția noastră.



*Infinitul ! Niciodată alt  
subiect nu a tulburat  
așa de adânc spiritul omului.*

*D. Hilbert*

- Aș vrea să începem convorbirea răsfoind împreună cartea lui C. A. Valson despre viața lui Cauchy. O am aici, în noua prezentare a lui Rene Taton (17).

- Te înțeleg. Celebrul matematician Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a fost un om profund religios și a ținut să o spună. În noua editare a lui Taton, acesta îi impută lui Valson „*că a accentuat prea mult activitatea de creștin militant a lui Cauchy, în loc să fi dat o mai mare atenție activității lui matematice*”! Văd că în biografie, capitolele XII-XVI sunt dedicate acestui domeniu.

- Pentru noi, însă, tocmai aceste capitole sunt acelea care ne interesează, căci nu ne-am propus să discutăm istoria matematicilor ci istoria matematicienilor care au crezut în divinitate și au simțit că matematica este o cale ce te apropie de ea. Așa cum a făcut-o Cauchy. Iată cuvintele pe care le-a spus Cauchy și pe care Valson le-a ales ca motto la capitolul XII: „*M-am adâncit în studiul științelor umane și am recunoscut, din ce în ce mai mult, adevărul cuvintelor lui Bacon: «Dacă puțină filozofie ne face necredincioși mai multă știință ne readuce la credință»*». La această mărturisire a lui Cauchy, Valson a adăugat: „*Nu-i rar să întâlnești la savanți sentimente religioase; putem spune că aceste sentimente sunt rezultatul imediat al întregii științe profunde. Oamenii care își petrec viața studiind marile legi ale naturii și dacă o fac într-un spirit cu adevărat filozofic, străduindu-se să se urce la originea lucrurilor și la izvorul tuturor adevărilor, întâlnesc în mod necesar, în calea lor, ideea unui Dumnezeu Creator, a cărui putere și înțelegere strălucește peste tot în Univers.*”



- Hai să citim „Profesiunea de credință” scrisă de Cauchy, dar mai înainte să ne oprim asupra observației lui Valson: *„Acest caracter de creștin practicant a lui Cauchy este cu atât mai remarcabil cu cât împrejurările în mijlocul cărora trăia păreau că se pretează mai puțin. Epoca în care s-a născut era a necredincioșilor. În societatea europeană se petrecuse o mare schimbare: necredința domnea peste tot”*. Acum, să citim și „profesiunea de credință”.

- „Eu sunt credincios, adică eu cred în divinitatea lui Isus Hristos alături de Tycho-Brahe, Copernic, Descartes, Newton, Fermat, Leibniz, Pascal, Grimald, Euler, Guldin, Bascovich, Gerdil, împreună cu toți marii astronomi, toți marii geometri din secolele trecute... Convingerile mele nu sunt rezultatul prejudecăților din naștere, ci ale unui examen aprofundat. Sunt catolic sincer, cum a fost Corneillene, la Bruyere, Bossuet... Fenelon, cum au fost și sunt încă un număr de oameni dintre cei mai de seamă din epoca noastră, dintre acei care aduc cea mai mare cinste științei, filosofiei, literaturii, care au ilustrat cel mai mult Academiile noastre. Împărtășesc convingerile adânci care le-au arătat, prin cuvintele lor, prin acțiunile și prin scrierile lor, atâția savanți de prin rang: Ruffini, Haüy, Laennec, Ampere, Pelletiere, Freycinet, Coriolis și, dacă nu numesc pe ceilalți de frică de a nu le răni modestia, pot spune, cel puțin, că-mi place să regăsesc întreaga noblețe, întreaga generozitate a credinței creștine în iluștrii mei prieteni, în creatorul cristalografiei, în inventatorul chininei și a stetoscopului, în navigatorul celebru care a condus Urania și al nemuritorului autor al electricității dinamice”.

De la această „mărturisire” vreau să trec la alta, din cartea lui Werner Heisenberg „Pași peste graniță”, te rog să asculți: „Atunci când, în secolul al XVII-lea, știința a fost întemeiată de Kepler, Galilei și Newton mai persista încă acea imagine a naturii din Evul Mediu, care vedea în natură, înainte de toate, creația lui Dumnezeu. Natura fiind considerată drept opera lui Dumnezeu,



oamenilor din acel timp li s-ar fi părut fără sens să discute asupra unei lumi materiale independentă de Dumnezeu”. Ca un document al acelei epoci, aş dori să citez cuvintele cu care Kepler şi-a încheiat ultimul volum al „Armoniei cosmice”; „Îţi mulţumesc Dumnezeu, Creatorul meu, că mi-ai îngăduit să văd frumuseţea în opera creaţiei Tale şi să mă bucur de lucrarea mâinilor Tale. Iată am încheiat opera către care m-am simţit chemat: am pus în valoare talentul pe care mi l-ai dăruit, am făcut cunoscută măreţia operelor Tale oamenilor, care vor citi mărturisirile, aşa cum spiritul meu mărginit a putut să le înţeleagă” (18).

- Acum hai să citim câte ceva şi despre unii dintre matematicienii amintiţi de Cauchy. De pildă despre Descartes (1596-1650) găsim anumite date în cartea lui E. T. Bell: „Descartes a fost acuzat de ateism, nimic mai fals. Ideile lui religioase erau de o simplitate naturală în ciuda scepticismului său raţionalist. Într-adevăr, el compara religia lui cu aceea a doicei de la care a primit-o şi spunea că i se pare la fel de odihnitor să se sprijine, pe una ca şi pe cealaltă” (19).

- Mai mult, era un credincios practicant căci, odată, ca să mulţumească Sfintei Fecioare că l-a ajutat să-şi limpezească gândurile, a făcut un pelerinaj la Notre Dame de Lorette. Dar să ne oprim la ziua de 10 noiembrie 1619, pe care Descartes o considera cea mai importantă din viaţa lui, fiindcă ea a decis asupra viitorului său. În ajunul acestei zile a avut trei vise, unul după altul, care l-au impresionat foarte tare. El era atunci în armată. În primul vis, Descartes se vedea alungat de vânturi puternice, din siguranţa colegiului sau a bisericii sale, către un alt loc, pe care vântul nu-l putea clătina; în al doilea se vedea observând o furtună teribilă cu ochii ştiinţei lipsiţi de orice superstiţie şi îşi dădea seama că furtuna, odată văzută aşa cum este, nu-i poate pricinui nici un rău; în al treilea, el visa că recita un poem de Ausonius, începând prin aceste cuvinte: „Ce cale trebuie să urmez în viaţa mea?”. Mai mult, Descartes spune că s-a trezit plin de entuziasm (probabil în sensul mistic al cuvântului) şi că, aşa ca în al doilea vis, i s-a relevat cheia magică care-i



va deschide calea la comorile naturii și că-l va pune în posesiunea adevăratelor fundamente ale oricărei științe. Ce anume a fost această cheie misterioasă? Se pare că Descartes nu a spus-o nimănui explicit, dar se crede că e vorba de aplicarea algebrei la geometrii, într-un cuvânt, de geometrie analitică și, mai general, de explicarea fenomenelor naturale prin matematică, adică de fizica matematică (1.c.19. pag. 51).

- De atunci, el s-a retras din armată și a petrecut următorii cinci ani în studiul matematicilor pure, punând bazele geometriei analitice. La vârsta de 32 de ani, fiind la Paris, Descartes s-a împrietenit cu doi dintre cardinalii cei mai influenți și aceștia îl determină să înceapă a-și desăvârși opera. Dar abia la 41 de ani se hotărăște să-și publice vestita sa lucrare: „Discurs asupra metodei” în care enunță celebra frază „gândesc deci exist”. El leagă astfel realitatea experienței lui Dumnezeu de faptul că noi avem cunoștință de această realitate.

- Într-adevăr, Descartes considera că omul se poate îndoi de existența reală a lucrurilor din jurul lui, a lucrurilor pe care le cunoaște cu ajutorul simțurilor, căci simțurile se înșală. Un băț cufundat în apă apare frânt deși, în realitate, el este drept, două linii paralele par că se întâlnesc undeva în depărtare, pe când ele nu se întâlnesc de fapt niciodată. Cunoașterea adevărată se poate obține numai prin gândire și aceasta i-a fost insuflată omului de Dumnezeu. Omul gândește îndoindu-se și dacă el poate cugeta corect, aceasta se datorește perfecțiunii pe care Dumnezeu a pus-o în om. Acest lucru se poate constata din claritatea și precizia care învăluie noțiunile matematice, din demonstrațiile care duc la adevărurile matematice, adevăruri care există nu numai în mintea noastră ci și în realitatea din afara gândirii noastre. Dacă avem în față un triunghi plan, atunci suma unghiurilor lui este egală cu două unghiuri drepte; dacă avem de-a face cu un pătrat, atunci diagonalele lui se taie în unghi drept. Dumnezeu a creat o serie de adevăruri veșnice, printre care sunt și cele matematice. Elementele matematice, ca întinderea



lucrurilor în spațiu, sunt însușiri care rămân neschimbate și le aflăm cu ajutorul rațiunii. De aceea, cunoașterea riguroasă este posibilă dacă reducem elementele fizice ale lucrurilor la noțiuni matematice, fiindcă matematica studiază în lucruri ceea ce se referă la număr, măsură, figură, spațiu sau mișcare. Într-o scrisoare adresată lui Mersenne, în 1638, vorbind despre Galileu, el arată că acesta "se străduiește să cerceteze obiectele fizice cu ajutorul demonstrațiilor matematice. În această privință, sunt cu totul de acord cu el și socot că nu există alt mijloc pentru căutarea adevărului" (20).

- După Descartes, Cauchy îl numește pe Newton, (1643-1727). În secolul al XVII-lea, știința a cunoscut o dezvoltare comparabilă cu aceea din epoca elenismului și, apoi, cu cea din epoca noastră. Acela care i-a deschis calea lui Newton către matematică a fost marele matematician Isaac Barrow care, în 1663, era profesor la Universitatea din Cambridge. Prezentând cartea pe care Isaac Newton a publicat-o întâia oară în 1686, „Principiile matematice ale filosofiei naturale” (21), astronomul Edmond Haley a închinat matematicii o odă. În traducerea în limba română făcută de A. Naum, în hexametri, ea începe astfel:

„Iată și-a cerului lege și cumpăna lumii divine,  
Măsurătoarea lui Jupiter iat-o și legile care  
Nu le-a călcat nici părintele lumii, Atotfăcătorul,  
Când i-a urzit începutul și iat-ale lumii temeuri  
Puse de dânsul...” (1.c.21, pag. 9).

- În prefața la ediția a doua a aceleiași lucrări, apărută în 1713, astronomul Roger Cotes scria: „Excelenta operă a lui Newton se prezintă ca o cetate foarte întărită, împotriva atacurilor ateștilor: căci nici nu vei putea lua mai bine din alt loc decât din această tolbă, săgețile împotriva hoardei necredincioase” (1.c. pag. 23). Și, iată în „Solia generală” de la sfârșitul volumului, găsim chiar vorbele lui Newton: "Acestea toate (sistemul solar) le guvernează, nu ca sufletul lumii ci ca Domnul Universului. Și, din cauza stăpânirii sale, se numește de obicei Domnul Dumnezeu, adică împărat universal...



Dumnezeul suprem este o ființă eternă, infinită, absolut perfectă: dar o ființă oricât de perfectă fără stăpânire nu e Dumnezeu. Căci zicem: Dumnezeu meu, Dumnezeu vostru, Dumnezeu lui Israel, Zeul Zeilor, Domnul Domnilor.... Cuvântul Dumnezeu uneori înseamnă Domn: dar nu orice Domn este Dumnezeu. Dominația unei ființe spirituale constituie un Dumnezeu... și, din stăpânirea adevărată, urmează că Dumnezeu adevărat este viu, inteligent și puternic... Este etern și infinit, atotputernic și atotștiutor, adică durează din etern în etern, este prezent din infinit în infinit, toate le guvernează și toate le cunoaște care sunt sau pot fi "(1.c. pag. 417).

- Din aceste rânduri, pe care mi le-ai citit, se vede clar că Isaac Newton a fost un om cu adevărat credincios. O subliniază, de altfel, și traducătorul, prof. Victor Marian, în biografia cu care își încheie traducerea: „Newton era un om conștiincios și religios ducând o viață morală; unul dintre contemporanii săi îl caracterizează ca *"sufletul cel mai curat pe care l-a cunoscut"* (1. c. pag. 435). Se povestește că Newton nu permitea să se vorbească de rău despre religie, iar odată, pe când Haley, care nu avea asemenea scrupule, a făcut unele glume pe această chestie, Newton l-a întrerupt cu aceste cuvinte: *"Eu am examinat aceste lucruri, dar dumneata nu ai făcut-o"*.

- Isaac Newton a pus bazele matematicii moderne, perfecționând sau inventând metode noi, în diferitele ramuri ale matematicii. Din 1705, când avea 63 de ani, a început să studieze teologia și a scris despre profeți. În 1707 a publicat Aritmetica universală și în 1711, Analiza prin serii infinite. Polemica lui cu Leibniz, legată de prioritatea Calculului diferențial, a început în 1708 și a durat până în 1716.

- Vechii greci nu au bănuț existenta legii atracției universale. Ea a fost descoperită de Newton, bazându-se pe cele trei legi fundamentale ale mișcării planetelor, stabilite de Kepler.

- Am vorbit, mai întâi, despre Newton, ca să respectăm ordinea în care a înșirat Cauchy pe matematicienii religioși și credincioși dar, cronologic, după Descartes ar fi trebuit să-l amintim mai



întâi pe Pascal, contemporan cu el. Deși mai tânăr cu 27 de ani decât Descartes, Blaise Pascal (1623-1662) asista de la vârsta de 14 ani la ședințele cu caracter științific pe care le conducea, în chilia sa, Mersenne, ședințe din care s-a dezvoltat mai târziu Academia de științe a Franței. De copil, Pascal a dovedit calități de mare matematician. La 12 ani a redescoperit o parte din geometria lui Euclid, demonstrând, într-un mod personal, că suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte. La 16 ani a scris „Tratat despre conice”, în care se găsesc multe rezultate originale. Printre altele el a stabilit o teoremă despre hexagoanele înscrise într-o conică; teorema, cunoscută sub numele de „*hexagrama mistică*”, stabilește condiția ca șase puncte dintr-un plan să se găsească pe aceeași conică. Dar, în anul 1654, la vârsta de 31 de ani, atunci când la 19 decembrie a cunoscut „noaptea de foc”, adică a avut o revelație mistică, el a părăsit brusc domeniul preocupărilor matematice și fizice, considerând că scopul vieții lui nu este știința ci religia. Atunci s-a convertit, intrând în ordinul janseniților și s-a stabilit definitiv la Port-Royal. *„Într-un moment în care Pascal se bizuia pe dragostea lumii și a științei, când în contemplarea acelei naturi umane viața societății și filozofia și-au revelat măreția, în momentul în care geniul lui, admirat de toți și spiritul lui sărbătorit de oameni importanți, îi asigurau gloria și fericirea pe care o urmărea cu inima lui aprinsă,... pe când avea 30 de ani, a fost izbit de o lumină extraordinară, care i-a arătat lucrurile și pe el însuși într-un mod cu totul nou. Se părea că toate bunurile care l-au încântat până atunci pluteau ca niște atomi imperceptibil în inima lui infinită. Se întreba dacă lucrurile care îl preocupau, bucuriile în care se complăcea, erau cu adevărat demne de el, demne de sufletul omenesc. El a avut sentimentul unei nepotriviri imense între condiția lui și destinul lui ”*, observă E. Boutroux (22).

- Totuși, pasiunea lui pentru matematică nu a fost definitiv înăbușită. El a continuat corespondența cu prietenii lui matematicieni asupra unor probleme la care lucrase mai înainte. Mai mult,



chiar pe când avea 35 de ani, l-a cuprins într-o noapte o teribilă durere de dinți și ca să o stăpânească și-a îndreptat toate gândurile asupra cicloidei, curbă cunoscută atunci sub numele de ruletă. Durerile i-au încetat și, interpretând acest fapt ca o bunăvoință a lui Dumnezeu, a continuat să studieze proprietățile cicloidei timp de 8 zile neîntrerupt. A publicat, apoi, aceste rezultate, sub numele Amos Dettonville și le-a adresat, ca o provocare, matematicienilor francezi și englezi. În mănăstire a scris două cărți din domeniul literelor și al filosofiei: "*Provincialele*" și "*Cugetări*" care-și păstrează interesul până acum.

- Iată una din "*Cugetări*": „Noi știm că există un infinit dar nu-i cunoaștem natura lui. Așa după cum știm că numerele nu sunt finite, că există un infinit în număr, dar nu știm cum este. El nu-i nici un număr par nici un număr impar, căci adăugând unitatea el nu-și schimbă natura, totuși el este un număr și se știe că orice număr este par sau impar, dar această proprietate se referă numai la numerele finite.

Astfel putem cunoaște că există un Dumnezeu, fără să știm ce este El. Noi cunoaștem doar existența și natura finitului căci suntem finiți și mari ca El. Cunoaștem existența infinitului dar nu știm natura lui, pentru că și el are ca noi întindere, dar el nu-i mărginit ca noi. Însă existența și natura lui Dumnezeu nu o cunoaștem pentru că El nu are nici întindere și nici margini. Prin credință îi cunoaștem existența, prin glorie îi cunoaștem natura. Ori, am arătat că putem cunoaște foarte bine existența unui lucru, fără să-i cunoaștem natura.” (23).

- Iată o problemă, aceea a infinitului, la care am putea zăbovi mult, dar s-o lăsăm pentru mai târziu. Acum să ne întoarcem numai la antichitate căci și Pitagora și Platon au pus problema infinitului în matematică. Ei au ajuns la noțiunea de infinit observând că, în șirul numerelor naturale, putem obține întotdeauna un număr mai mare decât un număr dat, adăugându-i acestuia o unitate. Așadar, ei considerau infinitul ca o mărime ce devine din ce în ce mai



mare, sau, în mod analog, din ce în ce mai mică; acesta este infinitul potențial. Această problemă l-a preocupat foarte mult și pe Aristotel. Uite am aici "*Fizica*" lui apărută în traducerea românească (24), să alegem câteva paragrafe, ca să-l ascultăm chiar pe autor: „Cercetarea în legătură cu infinitul este anevoioasă. Astfel și cei ce spun că există și cei ce spun că nu există, întâmpină dificultăți. Mai mult, se ridică întrebarea: cum este el? Este oare substanță? Sau este un atribut esențial al unei naturi? Sau nu este nici una nici alta? Și există oare un infinit sau numai lucruri infinite la număr?... Într-un fel, infinitul este ceea ce prin natură nu poate fi parcurs, ca vocea care este invizibilă, sau ceea ce se poate parcurge, dar nu are sfârșit, sau ceea ce se poate cu greu parcurge, sau ceea ce din natură poate fi parcurs dar nu există putința de a fi parcurs în întregime fiindcă n-are sfârșit...” (1.c. 23-24 pag. 67).

- Aristotel admitea numai existența infinitului potențial și susținea că nu poate exista infinitul actual: „Nu este posibil ca infinitul să fie separabil de lucrurile sensibile (ca și cum ar fi) în sine un lucru infinit. Iar dacă infinitul nu este nici mărime, nici număr, ci substanță în și prin sine, și nu accident, atunci este indivizibil pentru că divizibilitatea este mărime sau număr. Iar dacă este indivizibil nu este infinit, afară numai dacă nu este ca vocea nevăzută... Este iarăși evident că nu se poate admite că infinitul există, ca fiind în act, sau ca substanță, sau ca principiu, pentru că atunci oricare parte din el va fi infinită, dacă se poate împărți...” (1.c. pag.68).

- Iată-l vorbind și mai clar despre existența infinitului potențial: „Se spune că existența este în potențialitate și în act și că infinitul este prin adăugare și prin luare. S-a spus că mărimea în act nu este infinită, dar că este prin diviziune, rămâne deci că infinitul este prin potențialitate. Nu trebuie însă să înțelegem expresia "a fi în potențialitate" ca și cum s-ar spune că este posibil ca un lucru să fie o statuie adică va fi o statuie, tot așa am putea să socotim că există un lucru infinit, care va fi în act... De altfel este evident că infinitul există în timp, ca bunăoară la oameni și la divi-



ziunea mărimilor. În general, infinitul constă în faptul de a lua mereu alt și alt lucru și în faptul că lucrul luat este mereu limitat, dar este mereu altul și altul. ” (pag 74).

- Infinitul l-a preocupat mult și pe Leonard Euler (1707-1783) despre care Arago spunea că „el calcula cu ușurința cu care omul respiră și vulturul zboară în văzduh”. Se povestește, în legătură cu infinitul, o întâmplare nostimă, anume când a avut loc întâlnirea lui cu Denis Diderot.

- După cum se știe Euler a petrecut o bună parte din viața lui în Rusia, la curtea împărătească. Pe vremea Ecaterinei, a fost invitat la curtea țarinei Denis Diderot care, în timpul șederii sale acolo, a căutat să convertească la ateism pe curteni. Acest lucru nu i-a plăcut deloc împărătesei și deci l-a rugat pe Euler să găsească o modalitate de a pune capăt acestui fapt. Așa se face că, atunci când cei doi învățați s-au întâlnit, Euler s-a adresat pe un ton foarte serios lui Diderot: --*"După cum vedeți, domnule, raportul  $(a + b)^n / n$  este infinit atunci când  $n$  este infinit, ceea ce dovedește că Dumnezeu există !"*. Surprins, Diderot care nu înțelegea nimic din această expresie a tăcut, ceea ce a provocat râsul lui Euler, al țarinei și al curții. Acest fapt l-a îndemnat pe Diderot să ceară permisiunea de a se întoarce în Franța, lucru care i s-a aprobat de îndată.

- Se pare că întâmplarea respectivă i-a plăcut și lui Euler căci l-a îndemnat să mai stabilească și alte expresii care tind spre infinit și să le pună în legătură cu existența lui Dumnezeu, iar rezultatele au fost publicate chiar atunci în revistele de teologie.

- Parcă marele C.F. Gauss (1777-1855) a rămas indiferent la problema infinitului actual, care începuse să apară pe vremea aceea tot mai des în scrierile matematicienilor? În anul 1831 el a scris unui prieten: „Protestez contra folosirii mărimilor infinite ca și cum ar fi ceva finit, ceea ce nu-i niciodată admisibil în matematică. Infinitul este numai un fel de a vorbi, adevăratul lui sens este o limită, de care se apropie nedefinit anumite rapoarte, în timp ce altele pot crește fără nici o restricție.”



- Și totuși, numai peste jumătate de veac, Georg Cantor (1845-1918) va introduce în matematică infinitul real sau actual. El a afirmat că: „diferența esențială între noțiunile de infinit potențial și infinit real este că primul se referă la o mărime variabilă, finită, crescând peste orice limită finită, în timp ce infinitul actual este o mărime constantă, fixată, situată dincolo de orice mărime finită”.

- Ca să putem urmări metoda prin care Georg Cantor a reușit să prezinte infinitul actual, trebuie să fixăm, mai întâi, noțiunea de *număr cardinal* sau *de putere* a unei mulțimi.

- Să precizăm întâi că pentru Cantor o "*mulțime*" înseamnă o reuniune de elemente, despre care se știe numai că, fiind dat un element oarecare, se poate afirma dacă el aparține, sau nu, mulțimii date.

- Așa-i. Acum să ne oprim, mai întâi, la mulțimile finite. Dacă două mulțimi au același număr de elemente, fapt ce se poate constata fie numărându-le, fie stabilind o corespondență de la unu la unu între elementele celor două mulțimi, se spune că ele sunt echivalente și au același *număr cardinal* sau aceeași *putere*.

Această noțiune de număr cardinal se aplică oricărei mulțimi finite de obiecte. Unui obiect izolat, fiind singurul obiect al mulțimii, îi corespunde numărul cardinal 1. Pornind de la această mulțime și adăugându-i în mod succesiv câte un nou element, se formează seria nelimitată de numere cardinale finite, având ca termeni diferite numere întregi. Acest principiu de formare constituie o clasă de numere:  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ , care sunt toate finite și printre care nu găsim un număr maxim, căci, oricât de mare ar fi  $n$  putem forma pe  $(n + 1)$ , așadar, mulțimea acestor numere este infinită. În cazul mulțimilor infinite, când numărarea elementelor lor nu mai poate avea loc, rămâne posibilă stabilirea corespondenței dintre elementele celor două mulțimi. De pildă, mulțimea numerelor naturale poate fi pusă în corespondență cu alte mulțimi de numere, de pildă cu aceea a numerelor pare:  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots; 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$



Cantor a numit toate mulțimile ce se pot pune în corespondență cu mulțimea numerelor naturale, *mulțimi numărabile* sau având același *număr cardinal* cu mulțimea numerelor naturale.

- Cantor a arătat că printre acele mulțimi care sunt infinite și numărabile, adică au aceeași putere cu mulțimea numerelor întregi, se află și mulțimea numerelor raționale precum și mulțimea numerelor algebrice, care este cu mult mai amplă decât ale celor raționale.

- E și natural să fie așa, fiindcă numerele algebrice de gradul  $n$  sunt acele numere raționale sau iraționale care verifică o ecuație algebrică de gradul  $n$ , cu coeficienți întregi.

- Mai mult, noțiunea de număr algebric a fost generalizată și pentru rădăcinile unei ecuații algebrice de gradul  $n$ , în care coeficienții ecuației sunt și anumite numere algebrice.

- Așa că, în rezumat, putem spune că, mulțimea numerelor întregi raționale:  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots, \gamma$  are tot atâtea numere, adică are același număr cardinal, ca și mulțimile numerelor raționale sau iraționale algebrice. Această mulțime  $\gamma$  este infinită, dar  $\gamma$  este un *infinit potențial*. Ca de la el să se ajungă la *infinitul actual* sau la *numărul transfinit* Cantor consideră „*limita către care tinde orice număr  $\gamma$ , cu condiția ca să înțelegem prin această limită  $\omega$  primul număr care urmează după toate numerele  $\gamma$ , astfel ca să poată fi considerat superior tuturor numerelor*”.

În cazul mulțimilor infinite a numerelor întregi, Cantor a ales ca simbol pe alef zero:  $\aleph_0$ , prima literă a alfabetului ebraic, și a reprezentat prin el puterea mulțimilor numărabile. Alef zero sare dincolo de numerele finite, el este un *număr transfinit* este *infinitul real* sau *infinitul actual*. Iată câteva dintre proprietățile lui:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0; \quad n \cdot \aleph_0 = \aleph_0; \quad \aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Din aceste relații rezultă că axioma din logică, bine cunoscută, care admite că întregul este mai mare decât o parte a lui, nu este adevărată decât în cazul mulțimilor finite. Mulțimile infinite

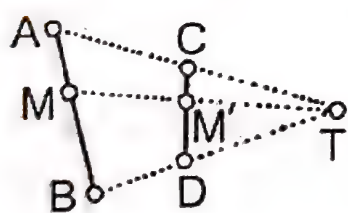


sunt părți integrante din ele înseși. Acest adevăr asupra infinitului actual a fost observat de Pascal, care a scris în *Cugetările sale*:

„Unitatea adăugată infinitului nu-l mărește. Infinitul este, dintre toate mărimile, acela care nu se micșorează prin scoaterea din el a unei părți a lui. De altfel și Sf. Augustin (354-430) a pus această problemă în cartea sa: *"Cetatea lui Dumnezeu"*: „Cine ar îndrăzni să refuze lui Dumnezeu puterea de a cunoaște toate numerele și mai ales numerele infinite? Trebuie să credem că Dumnezeu ajunge numai până la o anumită sumă de numere și nu le mai cunoaște pe celelalte? Ar fi fără sens, cu atât mai mult cu cât Dumnezeu iubește matematica.”

- Iată ce scrie și M. T. Bell: „Cantor se plasează astfel în mod definitiv pe planul marilor teologi ai Evului Mediu, pe care el i-a studiat în mod profund și i-a admirat cu pasiune.” (l.c.19, pag 591).

- Acest rezultat neașteptat și intuitiv, destul de greu de acceptat, i-a făcut pe matematicienii aceia să se întrebe dacă există și mulțimi infinite mai mari decât  $\aleph_0$ . Cantor a dovedit că mulțimea numerelor transcendente, adică a rădăcinilor ecuațiilor care nu sunt algebrice, ca de pildă  $a \cdot e^x = b$  sau  $\sin x = c$ , precum și mulțimea numerelor reale, este mai mare decât mulțimea numărabilă și,



deci, puterea unor asemenea mulțimi este mai mare decât  $\aleph_0$ . De asemenea, el a arătat că mulțimea punctelor de pe un segment de dreaptă, oricât de mic ar fi el, nu este numărabilă și

este egală cu mulțimea punctelor de pe oricare alt segment de mărime diferită. Într-adevăr, aceasta se poate constata ușor dacă se consideră două segmente de dreaptă AB și CD în care  $AB > CD$ . Unind B cu D și A cu C și numind T punctul de intersecție dintre AC și BD, orice dreapta TT' care trece prin T și se rotește în jurul punctului T, parcurge în același timp segmentele AB și CD, în așa fel că la fiecare punct M de pe AB, corespunde un singur punct M' de pe CD. Cantor a numit puterea acestor mulțimi a numerelor re-



ale sau a punctelor de pe o dreaptă, *puterea continuului* și a notat-o cu litera  $c$ . El a dovedit că puterea continuului este aceeași oricâte ar fi numărul dimensiunilor unui spațiu adică, numărul punctelor de pe un segment de dreaptă este egal cu acela de pe o porțiune de plan, sau într-un spațiu cu trei sau mai multe dimensiuni.

- Emile Borel observă că „atunci când Georg Cantor a publicat primele sale cercetări asupra numărării numerelor mai mari decât infinitul, publicul matematic nu l-a privit cu încredere. Totuși, mulți analiști au fost uimiți de frumusețea acestor speculații.” (25).

- Și E.T. Bell arată, în cartea sa (I.c.19, pag. 591), cele scrise în 1901 de Bertrand Russel despre Cantor, care s-a apropiat de infinit, ca un Prometeu: „Zenon s-a ocupat cu trei probleme... aceea a infinitesimalelor, aceea a infinitului și aceea a continuității... De la epoca lui la a noastră, cele mai puternice spirite din fiecare generație, au studiat pe rând aceste probleme, dar sincer vorbind, fără să ajungă la nimic. Însă Weierstrass, Dedekind și Cantor... le-au rezolvat complet.

Soluțiile lor sunt așa de clare, că nu au mai lăsat nici o urmă de dificultate. Acest rezultat este fără îndoială cel mai mare, cu care epoca noastră se poate mândri... Problema infinitului mic a fost rezolvată de Weierstrass; Dedekind a început soluționarea celorlalte două, iar Cantor le-a desăvârșit”.

- Avea dreptate Russel. Richard Dedekind, unul dintre cei mai mari matematicieni germani, care a înțeles importanța noțiunii de grup sau mulțime, în algebră și aritmetică, a stabilit teoria modernă a numerelor algebrice. Cu această problemă s-a ocupat și Cantor care, după cum am văzut, a ajuns să stabilească, în 1874 că grupul tuturor numerelor naturale  $1, 2, 3, 4, \dots$  conține tot atâția termeni ca și acela, infinit mai cuprinzător, al numerelor algebrice, adică au amândouă același număr cardinal. Cantor și Dedekind au fost prieteni, s-au întâlnit întâmplător în timpul unei călătorii în Elveția și, apoi, din acel an, au început să-și scrie fără întrerupere până în 1899, când Cantor nu a mai publicat nimic despre teoria



multimilor. În aceste scrisori, Cantor i-a arătat lui Dedekind nu numai toate rezultatele pe care le obținea ci și toate rezultatele pe care presupunea că le va obține. Dedekind îi răspundea prompt arătându-i demonstrațiile pe care le considera greșite, sau simplificându-i altele, căci Dedekind cunoștea aceste probleme de care se ocupase și el și avea autoritatea necesară. În 1937, conținutul matematic al acestor scrisori a apărut sub îngrijirea lui E. Noether și J. Cavailles la Paris, cu o introducere, din care vreau să citim câteva rânduri (26): „Sunt puține exemple de vieți așa de strâns legate de o operă de teorie, operă de asemeni exclusiv personală a unui singur cercetător. Într-o scrisoare pe care a scris-o la 17 ani, Cantor vorbește *"de o voce necunoscută și misterioasă"* care, în contra voinței tatălui său, îl chema să studieze matematica”.

- Când a obținut această aprobare, citim în T.E. Bell (I.c.19, pag. 595) răspunsul lui Cantor: „Scumpul meu Tată,... această, scrisoare decide viitorul meu. Sunt fericit să știu că nu te supără că voi urma ceea ce doresc eu... căci sufletul meu, toată ființa mea trăiește din vocația mea”.

- „În 1872, colegul său din Halle, Heine, l-a îndemnat să studieze seriile trigonometrice. În câțiva ani, acest studiu l-a condus la descoperiri uluitoare, întâi uluitoare chiar pentru autor : *"väd dar mu cred"*, îi scria el în 1877 lui Dedekind, referindu-se la noțiunile cu totul noi despre puterile abstracte, începuturile topologiei, aritmetica numerelor transfinite, edificiu a cărui îndrăzneală și frumusețe l-au făcut pe Hilbert să spună că *"reprezintă una dintre cele mai frumoase creații ale spiritului matematic"*, dar, a cărui noutate a stârnit neîncrederea lui Weierstrass, iar lui Kronecker i-a dezlănțuit chiar o ostilitate pe care nu a pregetat să i-o arate”. (I.c.26, pag. 3-4).

- Asupra acestui capitol înfiorător al relațiilor Cantor-Kronecker, nu ne vom opri fiindcă el nu face parte din preocupările noastre!

- Atunci să citim mai departe: „Singurul sprijin i-a venit din partea lui Mittag-Leffler care i-a deschis lui Cantor revista *Acta Mathematica* pe care a întemeiat-o. Chiar din volumul 2 a apărut o



traducere făcută în limba franceză a Memoriilor lui Cantor din *Mathematische Annalen*". (l.c.26 pag.4). Un articol a fost tradus de H. Poincaré, ceilalți traducători fiind tineri matematicieni din jurul lui Charles Hermite.

- Hermite, era „unul dintre adepții entuziaști ai teoriei lui Cantor” scrie Bell, adăugând că într-o scrisoare pe care a adresat-o lui Mittag-Leffler, Cantor spunea: „Elogiile pe care Hermite le aduce teoriei grupurilor au atâta preț în ochii mei și le merit așa de puțin, încât nu le dau publicității de frică să nu fiu acuzat de îngâmfare”. (l.c.19.pag. 606).

- Într-o altă scrisoare a lui Cantor către Mittag-Leffler, din 1884, în care se plângea de atitudinea lui Kronecker, el scria: „Dacă esența matematicii este libertatea, matematicianul nu face altceva decât să descopere o lume, intrinsecă spiritului său, care se află acolo într-o obiectivitate absolută: eu nu sunt, față de conținutul lucrărilor mele decât redactorul și funcționarul”. (l.c.26, pag.7).

- Georg Cantor nu a considerat descoperirea sa despre "*transfinit*" numai ca o problemă matematică ci, în strânsa ei legătură cu Religia și Matematica. H. Meschkowski menționează o scrisoare a lui Cantor, adresată lui Hermite, în 1894, în care scria: „Au trecut mai mult decât 20 de ani, de când, în domeniul spiritului meu, matematica nu-i singura și totuși ea este dragostea esențială a sufletului meu. Metafizica și Teologia mă pasionează într-așa fel încât mi-a rămas, relativ, mai puțin timp pentru prima mea dragoste... Acum nu mai am decât să mulțumesc lui Dumnezeu, cel foarte înțelept și foarte bun, că nu mi-a îndeplinit dorința mea (de a ocupa o catedră de matematică la Berlin) căci astfel m-a forțat, datorită unei cunoașteri mai adânci a teologiei, să-i servesc Lui și Sfintei Sale Biserici Catolice Romane mai bine decât aș fi făcut-o dacă m-aș fi ocupat exclusiv de matematică” (27).

- Cu 10 ani mai înainte de a fi publicat articolul pe care l-am citit când am început să discutăm, Pierre Thuillier a mai publicat, în aceeași revistă (28) un articol despre Cantor, care începe așa:



„Secole de-a rândul, în Occident, o tradiție solidă idealistă atribuia lui Dumnezeu o mare dragoste pentru matematică... Leibniz declara că lumea pe care o cunoaștem exprimă rezultatul unui calcul divin... Cantor, creatorul teoriei mulțimilor, credea că teoremele sale aveau ca origine pe Dumnezeu. El a găsit în Sf. Pavel și în Sf. Augustin fundamentul ultim al numerelor transfinite!”

- Într-adevăr, în ultimul său articol matematic publicat în 1895 și 1987 în *Mathematische Annalen*, despre "*mulțimile transfinite*", Cantor a pus ca motto, alături de un citat din Newton, pe acesta, din Epistolele Sf. Pavel: „Va veni timpul când ceea ce este acum ascuns, va fi adus la lumină”.

- Thuillier citează mai multe scrisori schimbate între diferiți teologi și Cantor, cu privire la infinitul actual. De pildă, în 1888 el îi scria călugărului neo-thomist Jeiles: „nu mă voi îndoi niciodată în legătură cu adevărul numerelor transfinite, că eu le-am recunoscut cu ajutorul lui Dumnezeu”. O altă scrisoare adresată călugărului dominican Thomas Esser în 1896, în care îi amintește despre încercările făcute încă din secolul al 18-lea asupra problemei infinitului actual, o încheie astfel: „Datorită mie, filosofia creștină va dispune, pentru întâia oară, de o adevărată teorie asupra infinitului, de la începutul lui. Știu sigur și precis că această teorie v-a fi acceptată, e vorba numai dacă acum, sau abia după moartea mea.”

- Și Cantor a avut dreptate ! Teoria lui asupra infinitului actual a fost acceptată de matematicieni, chiar de la începutul secolului 20, fiind considerată ca o contribuție fundamentală în matematică și, mai ales, în fundamentele analizei. „Teoria lui Cantor, spunea David Hilbert, îmi pare fructul cel mai admirabil al spiritului omenesc și, cu adevărat, una dintre aplicațiile cele mai sublim ale procedeelelor intelectuale ale omului”, și a adăugat: „Din paradisul pe care l-a creat Cantor pentru noi, nimeni nu ne va izgoni.”

- „Georg Cantor a murit în 1918, când geniul lui a fost recunoscut, i-au fost decernate onoruri și chiar controversa lui cu Kronecker a fost uitată”. (l.c. 9, pag. 613 ).



- Ca să încheiem definitiv discuția noastră, ne-a mai rămas o problemă, aceea dacă elementele matematice sunt descoperiri sau sunt invenții !

- Problema aceasta nu e rezolvată. Ea împarte pe matematicieni în două clase: unii consideră că matematica are o existență proprie, iar alții că este o invenție omenească. Dar acesta va fi subiectul convorbirii noastre viitoare.



*„Cunoașterea matematicii este o realitate.  
Puterea este o realitate și credința este o realitate.  
Iar aceste realități pot fi cercetate de om,  
independent de dogma acceptată”*

*Norbert Wiener*

- Marele matematician G. H. Hardy consideră că există o realitate matematică în sine. În cartea tradusă și la noi, cu titlul: "*Crezul meu? Matematica*" (629), el scrie: „Pentru mine și, după cum presupun, pentru majoritatea matematicienilor, mai există o realitate pe care eu o numesc realitate matematică. Dar, în ceea ce privește natura realității matematice, nu există nici un fel de acord, nici între matematicieni nici între filosofi. Sunt unii care consideră că această realitate este de natură *spirituală* și că, într-un sens, noi suntem acei care o construim, în timp ce alții socotesc că ea este în afara noastră și independentă de noi... N-aș vrea să discut aici despre vreuna din ele, chiar dacă aș fi competent să o fac. Îmi voi enunța însă concepția, cu scopul de evita unele confuzii, fie chiar de mică însemnătate. Am credința că realitatea matematică este în afara noastră, că sarcina noastră este de a o *descoperi* sau de a *observa* și că teoremele pe care le demonstrăm și pe care le descriem cu atâta emfază, ca pe niște *creații proprii*, nu sunt decât notele pe care le-am luat în timpul observațiilor noastre. Acest punct de vedere a fost susținut, într-o formă sau alta, de mulți filosofi de înaltă reputație, de la Platon încolo, astfel că limbajul pe care îl voi folosi e firesc pentru un om care este și el de aceeași părere”.

- Și teologii spun că matematica există în mod obiectiv. Că există o infinitate de numere pare sau prime etc, deși alții susțin că aceste numere au fost inventate. Cantor era de părerea acelor care consideră că numerele există în mod obiectiv. Kronecker susținea că numai "*numerele întregi au fost create de Dumnezeu*", restul



este opera oamenilor. O întrebare interesantă este aceea despre ordonarea punctelor pe o dreaptă. Ele există gata ordonate. *Într-o anumită ordine*, căci noi putem spune despre un punct că este la dreapta sau la stânga altuia și totuși noi *nu putem ordona punctele de pe o dreaptă*, pentru că între două puncte oarecare, oricât ar fi ele de apropiate există un alt punct al dreptei, adică o infinitate de puncte!

- Vreau să-ți citesc cele ce scrie E. Schrodinger. El afirmă că renumele lui Platon căruia „nu i se atribuie nici o descoperire specială privind numerele sau figurile geometrice”, se datorează: „faptului că a fost primul care a luat în considerație ideea existenței atemporale, reliefând-o, împotriva bunului simț - ca pe o realitate, mai reală decât existența noastră adevărată”. Platon a considerat că „învățarea prin rațiune are mai degrabă natura cunoașterii reamintite, stăpânită, cândva, iar în prezent aflată în stare latentă, decât pe aceea a descoperirii de adevăruri absolut noi... El a identificat și absorbit în spiritul său natura revelațiilor din domeniul numerelor și al figurilor geometrice, faptul că ele se dezvăluie de la sine prin raționamentul logic pur, care ne face să cunoaștem niște relații adevărate, al căror adevăr este inatacabil și pentru totdeauna prezent relațiile sunt corecte și vor fi corecte indiferent dacă le cercetăm sau nu. Un adevăr matematic este atemporal, el nu ia ființă în clipa când îl descoperim. Totuși, descoperirea lui este un eveniment real, el ne poate emoționa ca un dar din povești” (30).

- Și N. Bourbaki, accentuează acest fapt: „ori care ar fi nuanța filozofică cu care se elaborează concepția obiectelor matematice la un anume matematician sau filosof, există cel puțin un punct în care toți sunt în unanimitate: acela că obiectele *ne sunt date* și că nu stă în puterea noastră să le atribuim proprietăți arbitrare, așa cum nici un fizician nu poate schimba un fenomen natural”. (31).

- E adevărat. Așa după cum am mai spus, dacă unii matematicieni consideră că matematica este o invenție a oamenilor, alții admit că adevărurile matematice au o existență proprie, extraome-



nească și că noi întâlnim aceste adevăruri eterne în cercetările pe care le facem. Iată ce scrie și Jacques Hadamard: „Vorbim despre invenție, dar ar fi mai corect să vorbim despre descoperiri. Deosebirea între aceste două cuvinte este cunoscută: descoperirea privește un fenomen, o lege, o ființă vie care există dar despre care nu știam. Christofor Columb a descoperit America dar ea exista înaintea lui. Benjamin Franklin a inventat paratrăsnetul, înaintea lui el nu a existat... Lucrarea omului de știință este, în cazul matematicii, o descoperire. Așa cum îmi spunea profesorul meu Hermite: *"În matematică noi suntem servitori și totodată stăpâni."* Deși adevărurile nu ne sunt cunoscute încă, ele preexistă și ne impun inevitabil calea pe care trebuie să o urmăm, fără frică de a ne rătăci” (32).

- A! dacă-i vorba de Charles Hermite, atunci hai să citim mai pe îndelete cele ce a scris despre el Gaston Darboux (33): „El gândea (*și eu citez aici propriile lui expresii*) că numerele și funcțiile din analiză nu sunt produsul arbitrar al spiritului nostru, că ele există în afara noastră, cu același caracter de necesitate ca și lucrurile din realitatea obiectivă, că noi le întâlnim și le descoperim și le studiem așa cum o fac fizicienii, chimiștii, zoologii...”. Că această părere o avea de mult, ne-o dovedește un pasaj dintr-o scrisoare adresată de Hermite lui Stieltjes: „Sunt pe deplin convins că speculațiile cele mai abstracte din Analiză corespund realității care există în afara noastră și vom ajunge cândva să o cunoaștem. Cred chiar că eforturile geometrilor privesc, fără voia lor, o direcție care-i îndreaptă spre un anume scop și istoria științei îmi pare să dovedească că o descoperire analitică apare la momentul necesar ca să facă posibil un nou progres în studiul fenomenelor lumii reale, accesibile calcului”. Aceste idei reveneau în fiecare clipă în conversațiile cu Hermite. Adesea le nota pe caietul de calcule, ca de pildă pasajul următor: „Există, dacă nu mă înșel, o lume care este mulțimea adevărilor matematice, în care noi avem acces prin inteligență, după cum există o lume a realităților fizice, ambele independente de noi, amândouă de creație divină care nu ne apar deosebite decât din



cauza slăbiciunii spiritului nostru, dar care sunt, pentru o gândire mai puternică, unul și același lucru a cărui sinteză se revelează parțial în această minunată corespondență dintre Matematica abstractă, pe de o parte, Astronomia și toate ramurile Fizicii, pe de altă parte”.

Pornind de la faptul că Hermite considera că numerele au o existență proprie, ce li se dezvăluie, uneori, matematicienilor prin proprietăți pline de armonie, îmi vine în minte *teorema lui Goldbach* care, nici până azi, nu a putut fi demonstrată. În 1742 el a comunicat-o, într-o scrisoare către Euler. Goldbach i-a arătat că a găsit o legătură între numerele pare ( $n \geq 6$ ), și anume că acestea sunt suma a două numere prime impare, ba chiar că acest lucru se întâmplă în mai multe feluri, ca de pildă:  $34 = 3 + 31 = 29 + 5 = 23 + 11$ ;  $40 = 11 + 29 = 3 + 37 = 23 + 17...$  Euler i-a răspuns că a găsit această teoremă evidentă, dar că nu i-a putut stabili încă nici o demonstrație.

- Și Descartes credea în existența mărimilor matematice. Iată teoria lui asupra triunghiului etern „Îmi imaginez un triunghi, care nu se află nicăieri în lume, ci numai în gândul meu. Recunosc clar și evident, așa cum au demonstrat alții, diferitele proprietăți ale acestui triunghi, anume că suma celor trei unghiuri ale lui este egală cu două unghiuri drepte, că cel mai mare unghi al lui este susținut de latura cea mare și multe alte proprietăți, pe care, dacă vreau sau dacă nu vreau, există în acest triunghi, deși eu nu m-am gândit, sub nici o formă, la acestea atunci când mi l-am imaginat pentru prima oară și nici nu pot zice că le-am inventat eu”.

- Iată ce scria și Gauss, despre o teoremă de aritmetică pe care încerca de mai mulți ani s-o demonstreze dar nu reușea: „În sfârșit, de două zile, am reușit să o fac, dar nu din cauza îndelungatelor mele eforturi, ci numai prin voința lui Dumnezeu. Dintr-odată, ca un fulger, s-a rezolvat enigma, dar nu pot spune eu însumi care a fost firul conducător, care a legat cele ce știam de cele ce au făcut succesul meu posibil”.



- Iată ce crede și matematicianul Emile Borel: „Descoperirea geometriei analitice a fost primul exemplu de descoperire a unei metode generale în matematică, dacă prin metodă generală înțelegem o metodă care permite să se rezolve un număr nelimitat de probleme și nu acelea care permit să se rezolve numai câteva. După Descartes, alte descoperiri la fel de importante au lărgit mijloacele de lucru ale matematicienilor, ca de exemplu descoperirea de către Newton și Leibniz a Calcului Diferențial, de către Lagrange a Ecuațiilor generale ale Mecanicei, de către Gauss și Cauchy a Teoriei funcțiilor de variabilă imaginară, de către G. Cantor a Teoriei generale a mulțimilor. Fiecare dintre aceste descoperiri, ca aceea a lui Descartes, au făcut inutile un foarte mare număr de lucrări anterioare care aveau însă doar probleme particulare, pe când acele descoperiri au făcut posibile nenumărate cercetări noi, care au dus la rezultate mult mai rodnice” (1.c.25. pag. 58).

- Toate aceste mărturisiri, privind cercetarea și creația matematică te îndeamnă parcă să te întrebi: „ce este matematica?, care este natura adevărului matematic ?, care este calea gândirii matematicii ? sau care este esența ei ? E adevărat, numai că aceste întrebări nu mai intră în problema pe care ne-am pus-o noi când am început să discutăm și, afară de aceasta, nici nu ne putem aștepta să găsim un răspuns simplu și unic, fiindcă din antichitate și până azi, matematicienii nu au putut stabili o definiție simplă și unică a obiectului matematicii. N-avem decât să ne amintim, așa, la întâmplare, și fără nici o pretenție câteva dintre aceste definiții: Am văzut că Platon arată (în "*Republica*") că esențiala caracteristică a matematicii este modul particular al gradului de abstracție. Știi că și matematicienii se folosesc de figuri vizibile și că discută despre ele, fără însă a raționa asupra lor, ci asupra acelor entități cu care figurile doar seamănă: în vederea pătratului însuși și a diagonalei lui discută și nu în vederea figurii pe care o desenează, la fel procedează și în celelalte cazuri. Ei se folosesc de figurile pe care le alcătuiesc și le desenează, figuri ce pot avea imagini în apă sau umbre, dar se



folosesc de aceste figuri în calitate de imagini la rândul lor, căutând să vadă dincolo de ele acele realități care nu pot fi altfel văzute decât prin intermediul rațiunii”. (I.c.13. pag. 319).

- Cât despre Aristotel, el consideră matematica drept studiul cantității, iar Roger Bacon ca studiu a ceea ce-i face pe oameni subtili.

- Descartes afirmă că matematica este știința ordinii și a măsurii, Felix Klein ca știința lucrurilor de la sine evidente, Benjamin Peirce ca știința care trage concluziile necesare, iar Whitehead ca dezvoltarea „*tuturor formelor de raționament formal, necesare și deductive*”.

- Bertrand Russell o caracterizează ca un subiect identic cu logica, iar David Hilbert ca o gamă „*formal lipsită de înțeles !*”.

- E foarte frumoasă definiția pe care a dat-o Poincaré „*Invenției Matematice*”. Să o recitim: „Este actul în care spiritul omenesc pare să împrumute cel mai puțin lumii exterioare, în care el nu acționează decât prin el însuși și asupra lui însuși, astfel că cercetând procesul gândirii geometrice, putem spera să atingem ceea ce este mai esențial în spiritul omenesc.” (I.c.9, pag. 43).

Și tot în acest volum găsim: „Există o realitate mai subtilă decât aceea a lumii sensibile, care formează viața ființelor matematice și care este altceva decât logica” (I.c.9. pag. 133).

- Și acest *altceva* este tocmai ceea ce face frumusețea și armonia matematicii și prin care ea ne apropie de Dumnezeu!



## LITERATURĂ

1. La Recherche. Ianuarie 1987, pag. 116. Paris.
2. F. Picavet: Gerbert, un pape filosofe. Paris 1897, pag. 170.
3. 1. c. (2) pag. 187.
4. Înțelepciunea lui Solomon (11, 20).
5. 1. c. (2) pag. 198.
6. G. Kaupin: Les mathematiques. Options et Curiozites. Paris, 1898, 63.
7. B. G. Kuznețov: Rațiune și Ființare. Ed. Politică. București, 1979, pag. 405.
8. Pierre Boutroux: Les Mathematiens Paris, 1922, pag. 16.
9. Henri Poincaré: Science et Methode, Paris, 1927, pag. 43 și 57, 1923 pag. 34.
10. Leon Brunschvieg: Les etapes de la Philosophie Mathematique. Paris.
11. Euclid: Elemente vol. II, traducere de V. Marian. București, pag. 6. pag. 12.
12. Nicolas Bourbaki: Elemente d'Histoire des mathematiques. Paris, 1984.
13. Platon: Opere vol. V. Ed. științifică și enciclopedică. Buc. 1986. pag. 310.
14. D. Isac: Aristotel. Buc. Ed. Tineretului, 1959, pag. 168.
15. Paul Tannery: Mem sci. II, Paris, 1912, pag. 527.
16. Paul Tannery: Mem. sci. V, Paris, 1922, pag. 103 și 229.
17. C. A. Valson: La vie les travaux du Baron Cauchy. Paris, 1970, pag. 73.
18. Werner Heisenberg: Pași peste graniță. Ed. Politică, Buc. 1977, pag. 107.
19. E. T. Bell: Les grands mathematiens Paris, 1961, pag. 54.
20. F. Asmus: Descartes Ed. științifică. Buc. 1958, nota 5, pag. 348.



21. Isaac Newton: Principiile matem. ale filosofiei naturale. Traducere de V. Marian. Ed. Academiei, R. P. R. Buc, 956.
22. E. Boutroux: Pascal, Paris, 1924, pag. 68.
23. P. Archambault: Pascal, Paris, Pensees, pag. 68.
24. Aristotel: Fizica, Ed. științifică, Buc. 1966, pag. 67 79.
25. Emile Borel: Philosophe et home d'action. Paris, 1967, pag. 139.
26. E. Noether und J. Cavaillès: Briefwechsel Cantor - Dedekind, Paris, 1937.
27. H. Meschkowski: Aus den Briefwechsel C. Cantor Archive for History of exact science, 1962, vol. 2, pag. 510.
28. Pierre Thuillier: Dieu, Cantor et l'infini. La Recherche, dec. 1977.
29. G.H. Hardy: Crezul meu? Matematica. Buc. 1970, pag. 119.
30. Erwin Shrodinger: Ce este viața. Ed. Politică, Buc. 1980, pag. 175.
31. Nicolas Bourbaki: Elements D'Histoire des mathematiques. Paris, 1984, pag. 30.
32. Jacques Hadamard. Essai sur le psychologie de l'invention dans la domaine mathematique. Paris, 1975, pag. 9.
33. Gaston Darboux: Eloges academiques Notice sur Ch. Hermite, Paris, 1912, pag. 141-142.

